

---

# **Weiterentwicklung der rechnerischen Dimensionierung von Asphaltstraßen zur Steigerung der Wirtschaft- lichkeit, Ressourceneffizienz und Nachhaltigkeit**

---

Berichte der Bundesanstalt  
für Straßenwesen  
Straßenbau Heft S 206

---

# Weiterentwicklung der rechnerischen Dimensionie- rung von Asphaltstraßen zur Steigerung der Wirtschaft- lichkeit, Ressourceneffizienz und Nachhaltigkeit

---

von

Johannes Neumann, Markus Oeser

ISAC GmbH, Aachen

Uwe Reinhardt, Anita Blasl, Gustavo Canon Falla, Frohmut Wellner,  
Sascha Kayser

GWT-TUD GmbH, Dresden

---

Berichte der Bundesanstalt  
für Straßenwesen  
Straßenbau Heft S 206

**bast**   
Bundesanstalt für  
Straßenwesen

Die Bundesanstalt für Straßenwesen veröffentlicht ihre Arbeits- und Forschungsergebnisse in der Schriftenreihe Berichte der Bundesanstalt für Straßenwesen. Die Reihe besteht aus folgenden Unterreihen:

A - Allgemeines  
B - Brücken- und Ingenieurbau  
F - Fahrzeugtechnik  
M - Mensch und Sicherheit  
S - Straßenbau  
V - Verkehrstechnik

Es wird darauf hingewiesen, dass die unter dem Namen der Verfasser veröffentlichten Berichte nicht in jedem Fall die Ansicht des Herausgebers wiedergeben.

Nachdruck und photomechanische Wiedergabe, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Bundesanstalt für Straßenwesen, Stabsstelle Presse und Kommunikation.

Die Hefte der Schriftenreihe Berichte der Bundesanstalt für Straßenwesen können direkt bei der Carl Ed. Schünemann KG, Zweite Schlachtpforte 7, D-28195 Bremen, Telefon: (04 21) 3 69 03 - 53, bezogen werden.

Seit 2015 stehen die Berichte der Bundesanstalt für Straßenwesen (BASt) als kostenfreier Download im elektronischen BASt-Archiv ELBA zur Verfügung.  
<https://bast.opus.hbz-nrw.de>

## Impressum

Bericht zum Forschungsprojekt 04.0303

Weiterentwicklung der rechnerischen Dimensionierung von Asphaltstraßen zur Steigerung der Wirtschaftlichkeit, Ressourceneffizienz und Nachhaltigkeit

Fachbetreuung:

Dirk Jansen

Referat:

Analyse und Entwicklung von Straßenoberbauten

Herausgeber:

Bundesanstalt für Straßenwesen  
Brüderstraße 53, D-51427 Bergisch Gladbach  
Telefon: (0 22 04) 43 - 0

Redaktion:

Stabsstelle Presse und Kommunikation

Gestaltungskonzept:

MedienMélange: Kommunikation

Druck und Verlag:

Fachverlag NW in der Carl Ed. Schünemann KG  
Zweite Schlachtpforte 7, D-28195 Bremen  
Telefon: (04 21) 3 69 03 - 53 | Telefax: (04 21) 3 69 03 - 48  
[www.schuenemann-verlag.de](http://www.schuenemann-verlag.de)

ISSN 0943-9323 | ISBN 978-3-95606-809-6 | <https://doi.org/10.60850/bericht-s206>

Bergisch Gladbach, November 2024

# Kurzfassung

In diesem Projekt „FE 04.0303/2016/ORB“ wurden Methoden für die Dimensionierung und Analyse von flexiblen Straßenbefestigungen entwickelt und implementiert.

Primär wurde das Programm **flexCALC** erstellt, das die rechnerische Dimensionierung (gemäß RDO Asphalt) und die Substanzbewertung (gemäß RSO Asphalt) auf Basis eines Finite-Elemente-Rechenkerns in einer einheitlichen Softwareplattform zusammenführt. Des Weiteren steht in dem modular strukturierten Programm ein Rechenkern auf Basis der Mehrschichtentheorie zur Verfügung. Dieser zeichnet sich durch seine enorme Geschwindigkeit aus, unterliegt jedoch verschiedenen geometrischen und materiellen Einschränkungen. Der durch der Fourier-Reihen unterstützte Rechenkern auf Basis Finite-Elemente-Methode ermöglicht gegenüber der Mehrschichtentheorie die Berücksichtigung anderer Geometrien und Randbedingungen. Beide Methoden gelten für linear-elastische Statik.

Nichtlineare Materialmodelle und dynamische Effekte werden aufgrund ihrer Komplexität in der Dimensionierungspraxis bislang nicht berücksichtigt. Detaillierte Analysen erfordern allerdings deren Berücksichtigung, da die Ergebnisse unter idealisierten Annahmen stark von der Realität abweichen können. Daher wurde ein Finite-Elemente-Rechenkern mit rein polynomialen Ansatzfunktionen implementiert. Zur Auswahl stehen verschiedene Modelle für ungebundene, granulare Materialien und ein etabliertes Modell für viskoelastische Materialien. Zur Modellierung des Schichtenverbundes wurden verschiedene Konstitutivgesetze und die dazugehörige Elementformulierung implementiert. Außerdem ist ein expliziter Löser implementiert. Damit steht ein Werkzeugkasten bereit, der die Weiterentwicklung der Dimensionierung unterstützen wird.

Besonderes Augenmerk wurde auf eine ausführliche Dokumentation sowie die Möglichkeit zur einfachen Weiterentwicklung und Wartbarkeit gelegt. Durch aufwändige Verifikationen wurde die Korrektheit der implementierten Algorithmen sichergestellt.

# Enhancement of mathematical dimensioning of flexible pavements for boosting economic and resource efficiency as well as sustainability

## Abstract

Methods for the dimensioning and analysis of flexible road pavements have been developed and implemented in this project “FE 04.0303/2016/ORB”.

Primarily, the programme `flexCALC` has been created, which unifies mathematical dimensioning (according to German guideline RDO Asphalt) and condition assessment (according RSO Asphalt) based on a finite element kernel in one single software. In addition, a compute kernel based on multi-layer theory is available in the modularly structured program. The latter kernel is characterised by its enormous speed, but is subject to several geometric and constitutive restrictions. In contrast to multi-layer theory, the compute kernel based on the Fourier-supported finite element method allows investigations of a broader range of geometries and boundary conditions. Both methods apply to linear elastic statics.

Due to their complexity, non-linear material models and dynamic effects did not yet make it into dimensioning practice. However, detailed analyses require their consideration, since results under an idealised perspective can differ greatly from reality. For this purpose, a finite element compute kernel with purely polynomial shape functions has been implemented. There is a choice of non-linear models for unbound, granular materials and an established model for viscoelastic materials. In order to treat interlaminar interaction, several constitutive laws and the associated element formulation have been implemented. An explicit solver has also been implemented. Thereby, a numerical toolbox is available for further development of dimensioning techniques.

Special attention has been paid on detailed documentation and the ability for easy further development and maintainability. The correctness of the implemented algorithms has been established by an extensive verification scheme.

# Enhancement of mathematical dimensioning of flexible pavements for boosting economic and resource efficiency as well as sustainability

## Summary

Methods for the dimensioning and analysis of flexible road pavements have been developed and implemented in this project “FE 04.0303/2016/ORB”.

Primarily, the programme `flexCALC` has been created, which unifies mathematical dimensioning (according to German guideline RDO Asphalt) and condition assessment (according RSO Asphalt) based on a finite element kernel in one single software. In addition, a compute kernel based on multi-layer theory is available in the modularly structured program. The latter kernel is characterised by its enormous speed, but is subject to several geometric and constitutive restrictions. In contrast to multi-layer theory, the compute kernel based on the Fourier-supported finite element method allows investigations of a broader range of geometries and boundary conditions. Both methods apply to linear elastic statics.

Due to their complexity, non-linear material models and dynamic effects did not yet make it into dimensioning practice. However, detailed analyses require their consideration, since results under an idealised perspective can differ greatly from reality. For this purpose, a finite element compute kernel with purely polynomial shape functions has been implemented. There is a choice of non-linear models for unbound, granular materials and an established model for viscoelastic materials. In order to treat interlaminar interaction, several constitutive laws and the associated element formulation have been implemented. An explicit solver has also been implemented. Thereby, a numerical toolbox is available for further development of dimensioning techniques.

Special attention has been paid on detailed documentation and the ability for easy further development and maintainability. The correctness of the implemented algorithms has been established by an extensive verification scheme.

# Finite Element Based Modelling

The size of the problem and particularly the necessity to solve several similar problems in the probabilistic context require a high speed of the code. On the one hand, current PC architectures allow a reduction of the computation time by parallelization. On the other hand, already the computation method itself has to be as efficient as possible. The implemented code meets both requirements: High single thread performance and good scaling. The good scaling is mainly achieved by precomputing parts of the element stiffness matrices.

A classical finite element programme is typically structured as in figure 1a. In particular, the function which calculates the element stiffness matrix is called exactly once for each element<sup>1</sup>.

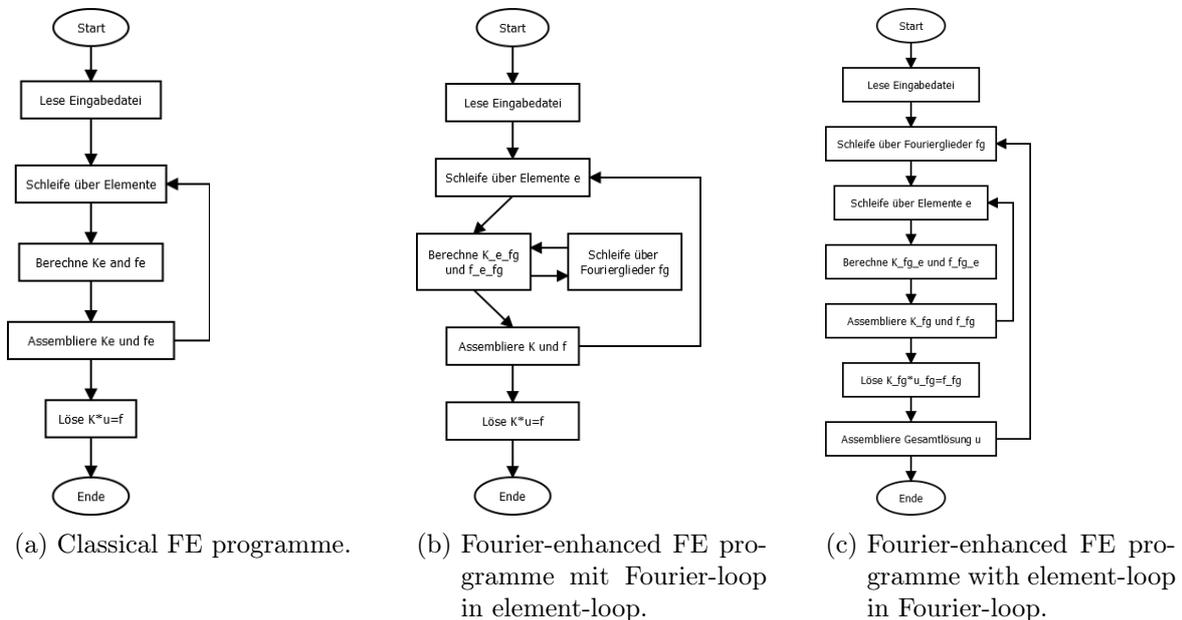


Figure 1: Flow-charts of classical and Fourier-enhanced FE-codes.

Introducing FSFEM offers several possibilities, which differ drastically in their runtime and their potential for parallelization. The investigation of different implementations showed that it is not advantageous to calculate all Fourier terms directly per element, as shown in figure 1b. Rather, it is sensible to pre-calculate most of the element stiffness matrices and then to place the element loop within the Fourier-term loop. Thus, also the Fourier-coefficients of the displacements can be solved for directly per Fourier term, since the global system of equations splits up into smaller subproblems. The procedure was verified by means of analytical solutions and numerical solutions of three-dimensional problems calculated via ABAQUS, see figure 2. It turned out that the selected FSFEM approach has limitations regarding its ability to take boundary conditions into regard. However, the deviations introduced by this approach can be considered small.

<sup>1</sup>In the context of linear elasticity.

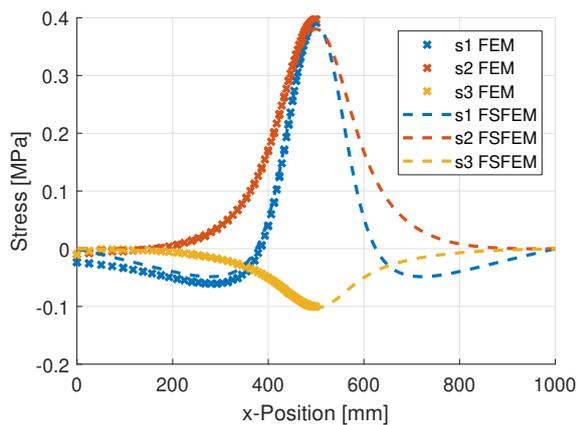


Figure 2: Stress plots along  $x$ -direction at the bottom of the top layer of an abstracted double-layered road construction.  $x$  blue,  $y$  red,  $z$  yellow. Crosses indicate FEM, dashed lines indicate FSFEM.

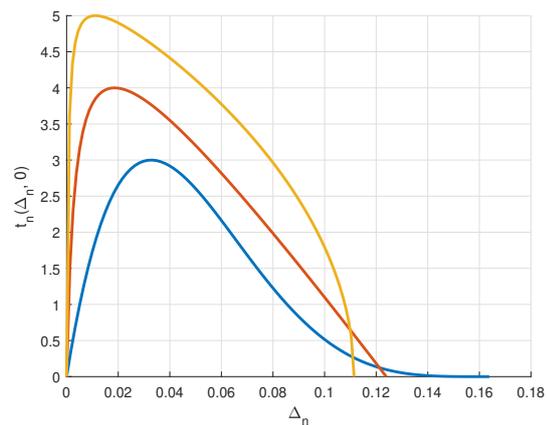


Figure 3: Traction-separation curves in normal direction of the interlayer bond model. The constitutive law can be parametrised to exhibit behaviour ranging from ductile (blue) to brittle (yellow).

## Nonlinear Material Models and Solver

In flexible pavement engineering, linear-elastic material models have only limited validity. In reality, bituminous materials show dissipative effects: kinetic energy is converted into heat and is not stored elastically. The generalized Maxwell-model was implemented in order to model this behaviour. The “Dresdner”-model and the “Universal”-model according to Uzan are available for the modelling of unbound, granular materials as they are present in base layers. In addition to the implicit solver for (quasi-)static calculations, the Newmark- $\beta$ -method is available as a widely used explicit solver.

## Modelling of the Interlayer Bond

The bond between individual layers of an asphalt road is highly dependent on traffic and temperature loads. In particular, the bond generally exhibits fatigue. The modeling of these properties by means of cohesive zone elements is expedient, since damage effects and eventual delamination can be modelled beyond the purely elastic response. Due to its adaptability to different damage evolutions, the “Park-Paulino-Roesler” model was implemented, see figure 3.

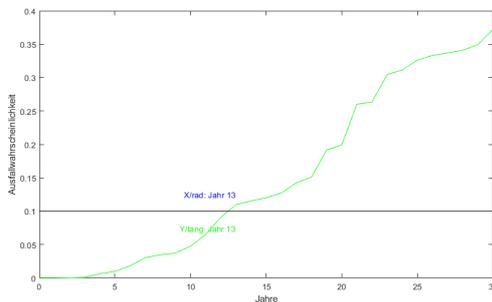
## Extended calculations according to RDO and RSO Asphalt

After completion and verification of the two calculation cores the program „flexible Calculations of Asphalt Layer Constructions“ (flexCALC) was extended by the functionality and design

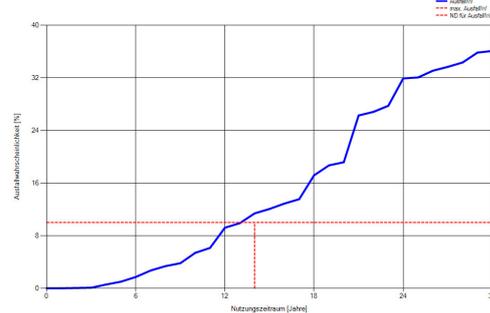
procedure described in the RDO Asphalt. So it is now possible to investigate design life calculations according to RDO Asphalt and based on the extended functionality of the Finite Element core which allows the use of limited geometry. In order to be able to use the same functionality when applying the probabilistic procedure of the RSO Asphalt it was necessary to reduce the calculation effort of at least 547 560 load cases. Without this reduction, a general application is extremely time-consuming and thus impracticable, despite possible parallel processing.

The reduction of the different load cases to be calculated was implemented as follows:

- Consideration of one single axle load class (instead of 26), due to linear-elastic material behavior.
- Consideration of four temperature classes (instead of 13) and twelve temperature curves as support points for an analytical calculation method.
- Consideration of five stiffness classes (for more than 5) of the asphalt base layer as supporting points for an analytical calculation method.
- Consideration of five layer thickness classes (for more than 5) of the asphalt pavement construction as supporting points for an analytical calculation method.



(a) Probability of default `flexCALC`.



(b) Probability of default `ADtoPave`.

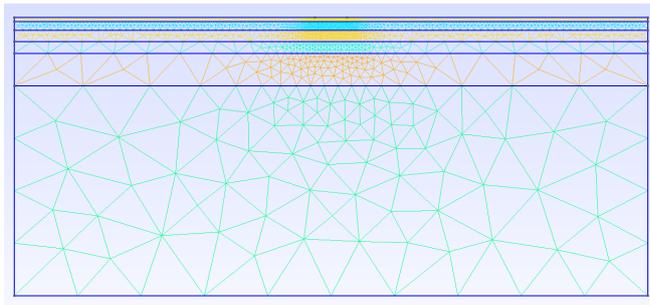
Figure 4: Comparison of the results of the probability of default of a verification calculation between `flexCALC` und `ADtoPave`.

Thus, the minimum number of stress states to be calculated is now 6480, considering the minimum number of three stiffness classes for each of the asphalt layers. Afterwards, the results of the calculations are used as support points for the interpolations by polynomial or power functions to analytically determine the results of the load cases not considered before. This procedure reduces the time required immensely, but affects the quality of the calculation results. The required number and position of the supporting points were varied and investigated within the research project, to keep the qualitative influence on the overall result as low as possible. In order to show the correctness of the results and the realised functionality, comparative verification calculations of the multifunctional overall solution were carried out with `ADtoPave` (see figure 4).

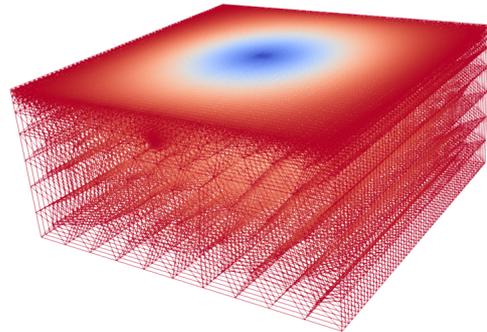
## Working with flexCALC

To make the use and further development of **flexCALC** as transparent and easy as possible, attention was paid during program development to ensure that the data formats used (**JSON**, **ABAQUS** and **VTK**) can be read and processed independently of the platform and software. On the one hand, this gives the user the possibility to work with the programs of his choice and on the other hand, **flexCALC** remains independent of the use of certain other software solutions and their future developments. Thus, in connection with the modular program structure, with **flexCALC**, a software platform is provided, with the help of which future tasks in the computational pavement design and structural analysis of asphalt pavements can also be processed. Besides the mentioned data formats the powerful but free software solutions **GMSH** and **ParaView** were used. With their help, the quality and the possibilities of the problems to be worked on with **flexCALC** are significantly increased.

**GMSH** allows a fast and problem-dependent parameterized meshing for the work with **FSFEM** (see figure 5a). With the help of **ParaView** the calculation results can be visualized flexible and according to user requirements (see figure 5b).



(a) Example of a mesh generated with **GMSH**.



(b) Example of a graphical output in **ParaView**.

Figure 5: Examples of programs used for **flexCALC**.

# Inhalt

<b>1</b>	<b>AP 100</b>	<b>14</b>
1.1	Deterministisch-analytische Modelle	15
1.2	Deterministisch-numerische Modelle	16
1.3	Probabilistische Modelle	17
<b>2</b>	<b>AP 200</b>	<b>19</b>
2.1	AP 210: Studium und Analyse verschiedener Diskretisierungsansätze	19
2.1.1	Die schwache Form	19
2.1.2	Isoparametrische FEM	20
2.1.3	Lösung des linearen Gleichungssystems	21
2.1.4	Fourier-Unterstützte FEM	22
2.1.5	Reifenlasten	27
2.1.6	Umgang mit Verschiebungsrandbedingungen	29
2.1.7	Temperaturverläufe	29
2.1.8	Typische Struktur von linearen FEM-Rechenkernen	30
2.1.9	Verifikation der FSFEM	31
2.1.10	Laufzeitvergleich von flexCALC zu SAFEM und ABAQUS	49
2.1.11	Untersuchungen zum Einsatz der Parallelisierungen	51
2.2	AP 220: Bewegte und dynamische Radlasten	54
2.2.1	FEM und Dynamik	54
2.2.2	Lösung der Bewegungsgleichungen	55
2.2.3	Instationäre und schwankende Radlasten	56
2.3	AP 230: Rheologische Eigenschaften und komplexe Formulierung	58
2.3.1	Theorie	58
2.3.2	Approximative Spannungsberechnung	61
2.3.3	Viskoelastischer Tangentenmodul	62
2.3.4	Verifikation	63
2.4	AP 240: Tragschichten ohne Bindemittel und nichtlineare Eigenschaften	65
2.4.1	Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems	65
2.4.2	Vorbemerkungen zur Modellierung ungebundener Materialien im Verkehrswegebau	66
2.4.3	$k$ - $\Theta$ -Modell	68
2.4.4	Universal-Modell	68

2.4.5	Dresdner Modell	68
2.4.6	Hinweise zu spannungsabhängigen Modellen	69
2.4.7	Weitere Modelle	70
2.4.8	Praktische Aspekte spannungsabhängiger Modelle	71
2.4.9	Verifikation	71
2.5	AP 250: Schichtenverbund, Last- und Temperaturabhängigkeiten	74
2.5.1	Finite-Elemente-Formulierung	78
2.5.2	PPR-Modell	82
2.5.3	Verifikation	84
2.5.4	Lineares Konstitutivgesetz	86
2.6	AP 260: Rissausbreitung und Abschätzung der Lebensdauer	88
<b>3</b>	<b>AP 300</b>	<b>89</b>
3.1	Regressionsanalyse	90
3.1.1	Einfache Lineare Regression	90
3.1.2	Multiple Lineare Regression	91
3.1.3	Polynomregression	92
3.1.4	Exponentielle Regression	92
3.1.5	Potentielle Regression	93
3.2	Verringerung der numerisch zu berücksichtigenden Belastungszustände	94
3.2.1	Achslastklassen	94
3.2.2	Temperaturbedingungen	95
3.3	Verringerung der numerisch zu berücksichtigenden Materialeigenschafts- und Konstruktionszustände	105
3.3.1	Steifigkeitsklassen (Variabilität der Steifigkeitsmoduln)	105
3.3.2	Dickenklassen (Variabilität der Dicke des Asphaltpakets)	106
3.3.3	Anwendungsbeispiel	106
3.4	Zusammenfassende Beschreibung der Vorgehensweise	107
3.4.1	Belastungszustände im Dimensionierungs- bzw. Prognoseprozess	108
3.4.2	Stochastische Modellierung der Variabilität der Material- und Konstruktionseigenschaften	109
3.4.3	Auswahl der maßgebenden Belastungszustände und Zustandsklassen der Material- und Konstruktionseigenschaften	109
3.4.4	Numerische Berechnung der Biegezugdehnung im Nachweispunkt	111
3.4.5	Temperatur-Dehnungs-Beziehung	111
3.4.6	Steifigkeits-Dehnungs-Beziehung	112

3.4.7	Asphaltpaketdicke-Dehnungs-Beziehung	114
3.4.8	Einbeziehung der unterschiedlichen Achslastklassen	115
<b>4</b>	<b>AP 400</b>	<b>131</b>
4.1	Viskoelastisches Materialverhalten und dynamische Belastung von Asphaltsschichten	131
4.1.1	Theoretische Grundlagen	132
4.1.2	Numerische Anwendung	133
4.1.3	Ergebnisse	135
4.2	Nichtlineares Materialverhalten von Tragschichten ohne Bindemittel	141
4.2.1	Dresdner Modell	141
4.2.2	Vergleich von Berechnungsergebnissen bei Annahme linearen und nichtlinearen Materialverhaltens	141
4.2.3	Bewertung der Berechnungszeiten bei Berücksichtigung nichtlinearen Materialverhaltens	148
4.3	Schichtenverbund	154
4.3.1	Schichtenverbundversuch	154
4.3.2	Versuchsauswertung	155
4.3.3	Einfluss der Normalspannung	157
4.4	Lastposition und Randeinflüsse	161
<b>5</b>	<b>AP 500</b>	<b>162</b>
5.1	Modularer Aufbau des Programms	162
5.2	Integration des optimierten probabilistischen Verfahrens in das Gesamtprogramm und Anbindung an die Berechnungskerne	163
5.3	Schnittstellen des Programmes	165
5.3.1	JSON - Datenformat der Ein- und Ausgabedaten	165
5.3.2	Details des Präprozessors für FSFEM	166
<b>6</b>	<b>AP 600</b>	<b>170</b>
6.1	Benutzeroberfläche zur Programmsteuerung	170
6.2	Überprüfung des Gesamtsystems	173
<b>7</b>	<b>AP 700</b>	<b>178</b>

<b>8</b>	<b>AP 800</b>	<b>180</b>
8.1	Verifikation des Programms	180
8.1.1	Vergleichsrechnungen gemäß den RDO Asphalt	181
8.1.2	Vergleichsrechnungen gemäß den RSO Asphalt	186
8.2	Kalibrierung des analytisch deterministischen Rechenkerns	192
	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>193</b>
	<b>Literatur</b>	<b>196</b>
	<b>Bilder</b>	<b>206</b>
	<b>Tabellen</b>	<b>212</b>

# 1 AP 100: Literatur- und Anforderungsanalyse zu deterministischen und probabilistischen Dimensionierungs- und Bewertungsprogrammen

In diesem Arbeitspaket werden die verfügbare wissenschaftliche Literatur und die bereits existierenden Programme für die Dimensionierung und Bewertung von flexiblen Straßenbefestigungen analysiert. Dabei wird zwischen deterministisch-analytischen Modellen, deterministisch-numerischen Modellen und probabilistischen Modellen zu unterscheiden.

Im folgenden wird eine Analyse verschiedener Berechnungsverfahren und -programme durchgeführt auf Basis derer Anforderungen an die Rechenzeiten der Berechnungskerne zu definieren, sodass deterministische und probabilistische Analysen gemäß RDO Asphalt und RSO Asphalt auch für die tägliche Ingenieurpraxis effektiv möglich sind. Insbesondere wird darauf geachtet, dass die in der Leistungsbeschreibung spezifizierten Punkte erbracht werden können.

Die folgenden Übersichten bedienen sich bei Oeser, Wang, Liu, Wellner u. a. 2015 und wurden aktualisiert. Typische Berechnungsmodelle im Verkehrswegebau sind die

- Halbraumtheorie,
- Plattentheorie,
- Mehrschichtentheorie (MST),
- Methode der Randelemente sowie die
- Methode der finiten Elemente (FEM).

Für geschichtete Bauwerke, wie Asphaltstraßen, liefert die Halbraumtheorie keine ausreichend genauen Ergebnisse. Die Plattentheorie wird vor allem zur Dimensionierung von starren Fahrbahnen eingesetzt. Beide Verfahren werden daher im folgenden nicht weiter behandelt.

## 1.1 Deterministisch-analytische Modelle

Die im Verkehrswegebau eingesetzten analytischen Berechnungsverfahren basieren auf unter speziellen Einschränkungen möglichen exakten Lösungen, sowie Näherungslösungen.

Die MST setzt voraus, dass alle Schichten isotrop, homogen, masselos und horizontal unendlich ausgedehnt sind. Außerdem liegen in Abhängigkeit der eingesetzten Lösungsstrategie weitere Einschränkungen bezüglich der Geometrie der Struktur und Belastung (statisch, Axialsymmetrie) vor. Da das Verhalten der eingesetzten Baustoffe und tatsächlich vorhandenen Beanspruchungen nicht wirklichkeitsnah abgebildet werden kann, kann es zu erheblichen Abweichungen zwischen dem berechneten und dem realen Verhalten der Verkehrswegebefestigungen kommen.

Es existieren mindestens zwei unterschiedliche Varianten der MST. Beide basieren auf einer partiellen Differentialgleichung 4ter Ordnung. Wird diese kann durch eine Hankel-Transformation gelöst müssen linear elastisches Materialverhalten und ortsfeste Belastung vorausgesetzt werden. Wird zur Lösung die Fourier-Transformation verwendet, können bewegte Lasten und linear viskoelastisches Materialverhalten abgebildet werden. Eine Übersicht über zahlreiche deterministisch-analytische Modelle gibt Tabelle 1.1, diese basiert auf Tabelle 5 aus European Communities 2000, wurde jedoch aktualisiert, da zu etlichen Programmen kein Bezugsweg mehr gefunden werden konnte. Andererseits sind einige Neuentwicklungen hinzugekommen. Allen deterministisch-analytischen Modellen ist gemein, dass diese bei korrekter Implementierung sehr schnell sind.

Programm	Methode	Bemerkung	Referenz
<a href="#">ADtoPave</a>	MST Hankel		
<a href="#">ALIZE LCPC</a>	MST Hankel		
<a href="#">Bisar</a>	MST Hankel	nicht mehr verfügbar	
<a href="#">Texas FPS 21</a>	MST	veraltet	
<a href="#">PaDesTo</a>	MST Hankel		
<a href="#">PerRoad 4.4</a>	MST	Freeware	
<a href="#">3DMove</a>	MST Fourier, Viskoelastizität	Freeware	(Siddharthan u. a. 1998)
<a href="#">Kenlayer</a>	MST	nicht mehr verfügbar	
<a href="#">Circly 7.0</a>	MST		
<a href="#">mePADS</a>	MST	zur Zeit nicht verfügbar	
<a href="#">VEROAD</a>	MST Fourier, Viskoelastizität	nicht verfügbar	(Hopman 1996)
<a href="#">Viscoroute</a>	MST Fourier, Viskoelastizität	verfügbar?	(Chabot, Chupin u. a. 2010)

Tabelle 1.1: Deterministisch-analytische Modelle. (Im \*.pdf sind die meisten Programmnamen Hyperlinks.)

## 1.2 Deterministisch-numerische Modelle

Um die im vorigen Abschnitt genannten Einschränkungen zu umgehen, kommen verschiedene numerische Verfahren zum Einsatz. Im folgenden steht die FEM im Fokus. Nach dem die das Problem beschreibende partielle Differentialgleichung in eine sogenannte schwache Form überführt wird, kann diese diskretisiert werden. In der klassischen FEM geschieht dies durch stückweise polynomiale Ansatzfunktionen, siehe auch Bathe 2002; Zienkiewicz u. a. 2013. Vorteile der FEM liegen in der hohen Flexibilität. Es können praktisch beliebige Geometrien, Kinematiken, physikalische Modelle und Randbedingungen verwendet werden. Als nachteilig sind die teilweise enorm hohen Anforderungen an Hardware und Laufzeit zu sehen. Aufgrund der hohen Verbreitung in quasi allen Disziplinen des Ingenieurwesens existiert eine Vielzahl an kommerziellen und auch freien Softwarepaketen, die die FEM in unterschiedlichem Maße implementieren. Als vielfältig verwendbare kommerzielle Programme seien hier Abaqus, Ansys, Cesar-LCPC, Comsol, LS-Dyna, Nastran, sowie Strand7 genannt. Bekannte freie Codes sind `code_aster` und `CalculiX`. Bei korrekter Abbildung der Physik des Problems und ausreichend feiner Diskretisierung konvergieren Lösungen mittels FEM gegen die „richtige“ Lösung, die allerdings im Allgemeinen unbekannt ist. Die Ergebnisqualität hängt somit vom betriebenen Aufwand ab, der dem Problem und dem gewünschten Genauigkeitsgrad angemessen ausfallen sollte. Es existieren darüber hinaus einige Speziallösungen für den Verkehrswegebau, diese sind in Tabelle 1.2 angeführt. Es fällt auf, dass bei diesen Programmen die meisten Bezugsmöglichkeiten unklar sind. Da es sich in den meisten Fällen um universitäre Forschungscode handelt dürften Anleitungen, Dokumentation und Support für den Produktiveinsatz unzureichend sein. In Bild 2.1.10 wird dargestellt, welche Laufzeiten bei einer Berechnung mittels dreidimensionaler Finite Elemente Methode (3D-FEM) zu erwarten sind.

Für die Dimensionierung, insbesondere unter Berücksichtigung der Probabilistik, ist eine große Anzahl an verschiedenen Rechnungen durchzuführen. Die Einzelrechnungen unterscheiden sich beispielsweise in Bezug auf die Schichtdicken, Steifigkeiten, etc. Die hohe Anzahl der Berechnungen stellt große Anforderungen an die Hardware bei Verwendung der 3D-FEM.

Fourier-unterstützte Finite Elemente Methoden (Fourier-supported finite element method(s) FSFEM), für die die besonderen Gegebenheiten der Straßengeometrie keine Einschränkungen darstellen sind hier rechentechnisch überlegen. Neben dem in Oeser, Wang, Liu, Wellner u. a. 2015 entwickelten Code sind im Verkehrswegebau nur die Arbeiten von Jooste 2002; Hu u. a. 2008; Eslaminia und Guddati 2016 bekannt, die dem Wissen der Autoren nach allerdings nicht zu verfügbaren Softwarelösungen geführt haben. Nichtsdestotrotz ist der Ansatz auch in anderen Feldern wohlbekannt. Entwickelt wurde er nach Wissen der Autoren von für den Einsatz in kartesischen Koordinaten von Cheung (1968) und Cheung (1976). Mutmaßlich weiter verbreitet war er jedoch für den Einsatz in krummlinigen Koordinatensystem, siehe bspw. die Arbeiten von Grafton und Strome (1963), Stricklin u. a. (1968) und Potts und Zdravkovic

(1999). Eine Übersicht über das Verfahren und einige Anwendungsbeispiele sind in Zienkiewicz (1975, Kap. 13) enthalten. Zienkiewicz (1975) nennt das Verfahren „halb-analytisch“, ein Begriff, dem sich dieser Bericht nicht anschließen wird. Es handelt sich nach Meinung der Autoren um ein numerisches Verfahren bei der die Ansatzfunktionen in einer Raumrichtung aus Fourier-Reihen bestehen.

Als starke Einschränkung der Anwendbarkeit der **FSFEM** gilt, dass diese nur dann effizient eingesetzt werden kann, wenn sich die geometrischen und die Materialeigenschaften in einer Raumrichtung nicht ändern. In diesem Fall entkoppelt die globale Steifigkeitsmatrix aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der Fourier-Reihen (Zienkiewicz 1975, Kap. 13.1). Nach Wissen der Autoren sind Potts und Zdravkovic (1999) die Einzigen die materielle Nichtlinearitäten behandeln. Die Berücksichtigung dieser führt dazu, dass die Steifigkeitsmatrix für einzelne Teilschwingungen nicht mehr entkoppelt, folglich ähneln die Hardware-Anforderungen denen der **3D-FEM**. Es ist nach Potts und Zdravkovic (1999, S. 358) möglich nichtsdestotrotz entkoppelt zu rechnen und den dabei entstehenden Fehler iterativ zu korrigieren. Eine Implementierung wird mittels konsistenter Tangente eines elasto-plastischen Materialgesetzes vorgeschlagen. Es ist nicht klar, ob das Verfahren in **ICFEP**<sup>1</sup> implementiert ist. Dieser Code steht auch nicht zur freien Verfügung. Weiterhin wird darauf hingewiesen, dass die Verwendung numerischer Tangenten, wie etwa für die nichtlinearen Bodenmodelle, wohl problematisch sei. Insgesamt halten die Autoren dieser Studie die Verwendung der **FSFEM** für beliebige materielle Nichtlinearitäten für ein Thema der numerischen Grundlagenforschung und noch nicht reif für den Produktiveinsatz.

Aus diesem Grund wurde im vorliegenden Projekt zur Behandlung der Nichtlinearitäten neben dem linearen **FSFEM**-Kernel auch ein **3D-FEM**-Kernel implementiert, der materielle Nichtlinearitäten behandeln kann.

Programm	Methode	Bemerkung	Referenz
APADS	FEM		(Bodin u. a. 2014)
Capa-3D	FEM	zur Zeit nicht verfügbar	
EverStressFE	FEM	Freeware, veraltet?	
FENLAP	FEM	veraltet, nicht verfügbar	(de Almeida 1993)
ILLI-Pave	FEM	nicht verfügbar	
MICHPAVE	FEM	Software veraltet	(Harichandran u. a. 1990)

Tabelle 1.2: Deterministisch-numerische Modelle. (Im \*.pdf sind die meisten Programmnamen Hyperlinks.)

### 1.3 Probabilistische Modelle

Bei der Variante der stochastischen Finite-Elemente-Methode (SFEM) werden Eingangsgrößen des Modells, welche mit einer Unsicherheit behaftet sind, zum Beispiel Ma-

<sup>1</sup>Imperial College Finite Element Program <https://www.imperial.ac.uk/geotechnics/research/icfep/>

terialfestigkeiten oder Belastungen, durch stochastische Größen modelliert. Dies kann mithilfe gewöhnlicher Zufallsvariablen erreicht werden. Oft werden auch Zufallsfelder verwendet, wobei es sich um zufällig variierende, stetige mathematische Funktionen handelt. Eine geläufige Berechnungsmethode ist dabei die Monte-Carlo-Simulation. Dabei wird die FE-Berechnung für viele zufällige Realisierungen (samples) der Eingangsgrößen wiederholt, bis man einen gewissen, im Vorfeld definierten, stochastischen Fehler unterschreitet. Anschließend werden aus allen Ergebnissen die Momente, also Mittelwert und Varianz, berechnet. Je nach Streuung der Eingangsgrößen sind oftmals sehr viele Wiederholungen der FE-Berechnung nötig, was viel Rechenzeit in Anspruch nehmen kann.

Die Probabilistik lässt sich natürlich auch mit einem MST basierten Verfahren koppeln. Vertreter dieses Ansatzes sind die bereits in Abschnitt 1.1 genannten PerRoad 4.4, sowie insbesondere ADtoPave. Letzteres kommt im vorliegenden Projekt mehrfach zum Einsatz.

## 2 AP 200: Weiterentwicklung des numerisch-deterministischen Rechenkerns

In diesem Arbeitspaket werden numerische Methoden für Straßenbefestigungen weiterentwickelt.

### 2.1 AP 210: Studium und Analyse verschiedener Diskretisierungsansätze

#### 2.1.1 Die schwache Form

Für materiell und geometrisch lineares Verhalten führt das Prinzip der virtuellen Arbeiten auf folgendes Gleichungssystem

$$\underbrace{\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\sigma} dV}_{\text{Virtuelle Arbeit der inneren Energie}} = \underbrace{\int_V \delta \mathbf{u}^\top \mathbf{b} dV}_{\text{Virtuelle Arbeit der Volumenlasten}} + \underbrace{\int_A \delta \mathbf{u}^\top \mathbf{t} dA}_{\text{Virtuelle Arbeit der Flächenlasten}} \quad (2.1)$$

Im Rahmen der geometrisch linearen Theorie gilt für die Dehnung

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad}(\mathbf{u})), \quad (2.2)$$

dabei gilt die Voigt-Notation wie folgt:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \quad (2.3)$$

Die Spannung kann mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes aus der Dehnung berechnet werden. Das Materialgesetz für lineare Elastizität lautet

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.4)$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma}$  den Cauchy-Spannungstensor und  $\mathbb{C}$  den Elastizitätstensor bezeichnet.  $\mathbb{C}$  lässt sich für den Fall linearer, isotroper Elastizität aus zwei Materialparametern zusammensetzen. Werden der Dehnungsmodul  $E$  und die Querkontraktionszahl  $\nu$  gewählt, lautet der Elastizitätstensor

$$\mathbb{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Isoparametrische FEM

Die FEM basiert darauf die schwache Form Gleichung 2.1 zu diskretisieren. Dies geschieht durch eine Zerlegung des Rechengebiets in Teile (Elemente) finiter Größe und die Wahl geeigneter Ansatzfunktionen des unbekanntes Verschiebungsfeldes innerhalb dieser Elemente. Geometrie und Verschiebungen nutzen hier die selben Ansatzfunktionen, es handelt sich also um einen isoparametrischen Ansatz.

Wie in der klassischen FEM üblich, interpolieren die Formfunktionen  $N$  die diskreten Knotenverschiebungen  $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i]^\top$  zum kontinuierlichen Verschiebungsfeld  $\bar{\mathbf{u}}$ .

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}(x, y, z)] \mathbf{u} \quad (2.6)$$

$$= \sum_{i=1}^{nN} \mathbf{N}_i \mathbf{u}_i \quad (2.7)$$

$$= \sum_{i=1}^{nN} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Mit Hilfe von Gleichung 2.3 lässt sich die Dehnung  $\boldsymbol{\epsilon}$  über die Ableitung der Ansatzfunktionen angeben. Eine zentrale Rolle spielt dabei der Ableitungsoperator  $\mathbf{B}$ , der wie folgt definiert ist

$$\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.9)$$

$$= \sum_{i=1}^{nN} \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (2.10)$$

$$= \sum_{i=1}^{nN} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$= [\mathbf{B}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{B}] \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{nN}\}^\top \quad (2.12)$$

### 2.1.3 Lösung des linearen Gleichungssystems

Damit stehen alle Bauteile bereit um Gleichung 2.1 zu diskretisieren. Mit Hilfe der Abkürzungen

$$\delta \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \delta \mathbf{u} \quad (2.13)$$

$$\delta \bar{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (2.14)$$

kann die schwache Form in folgender Schreibweise angegeben werden

$$\delta u \int_V \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\sigma} dV = \delta u \left( \int_V \mathbf{N}^\top \mathbf{b} dV + \int_A \mathbf{N}^\top \mathbf{t} dA \right). \quad (2.15)$$

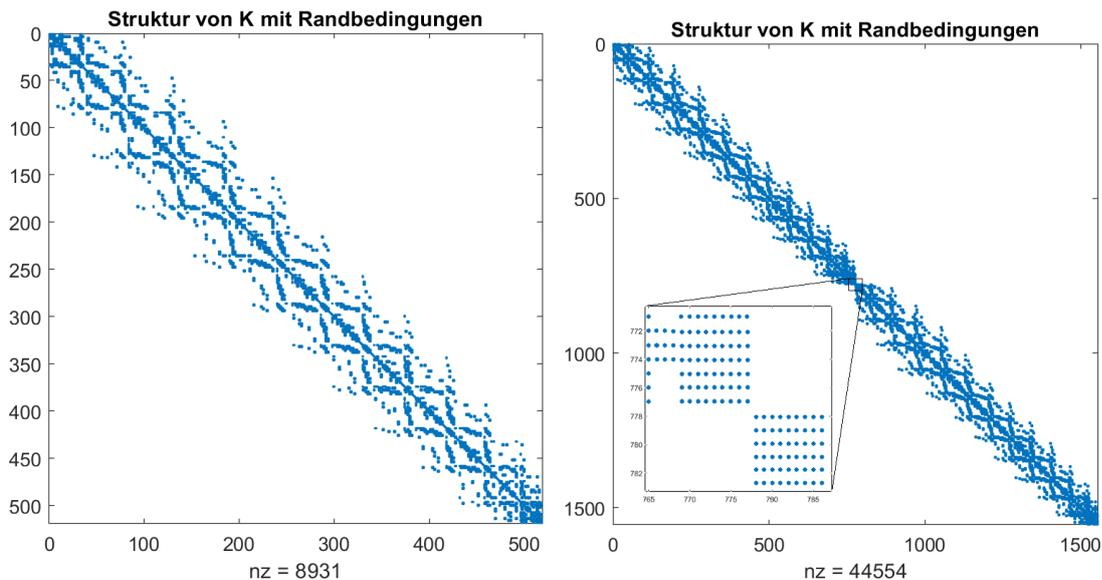
Nach Elimination von  $\delta u$  und durch Einsetzen von Gleichung 2.9 in Gleichung 2.4, erfolgt die Umformung für die virtuelle Arbeit der inneren Energie

$$\int_V \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \mathbf{B}^\top \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u} dV = \left( \int_V \mathbf{B}^\top \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{u} \quad (2.16)$$

Die Integration erfolgt jeweils über ein Element. Nach Assemblierung der einzelnen Elementbeiträge kann das globale Gleichungssystem als

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.17)$$

geschrieben werden. In Bild 2.1a ist die typische Bandstruktur von  $\mathbf{K}$  dargestellt, wie sie bei Finite-Elemente Rechnungen auftritt. Die Invertierung der globalen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  löst dann das GLS direkt, wobei dies numerisch und aus Speichergründen unvorteilhaft ist. Daher wird  $\mathbf{K}^{-1}$  niemals explizit berechnet, sondern das



(a) Struktur der globalen Steifigkeitsmatrix für 116 quadratische Dreiecke mit 2 Freiheitsgraden pro Knoten. (b) Struktur desselben Netzes mit 3 Freiheitsgraden pro Knoten und 2 Fouriergliedern.

Bild 2.1: Strukturen von Steifigkeitsmatrizen mit FEM (links) und mit FSFEM (rechts) Ansatz.

Gleichungssystem Gleichung 2.17 direkt gelöst. In Bild 2.1a ist deutlich zu sehen, dass die Speicherung einer vollbesetzten Matrix aus Gründen der Speichereffizienz unvorteilhaft ist. Das dazugehörige Gleichungssystem kann zwar parallelisiert gelöst werden, es zerfällt allerdings nicht automatisch in unabhängige Teilmatrizen wie dies bei der Fourier-Unterstützten-FEM (FSFEM) der Fall ist.

### 2.1.4 Fourier-Unterstützte FEM

Im vorliegenden Fall der Asphaltstraße sind die geometrischen und Materialeigenschaften in Längsrichtung näherungsweise unveränderlich, wobei sich die Belastungsgrößen ändern. Daher ist die Reduktion des dreidimensionalen Problems auf eine echt zweidimensionale Betrachtungsweise unter der Annahme von ebener Dehnung oder ebener Spannung nicht möglich. Allerdings ist es möglich ein Ersatzproblem zu betrachten in dem die Koordinatenrichtung nicht explizit vorkommt, in der die Eigenschaften unveränderlich sind. Die folgenden Ausführungen basieren auf Zienkiewicz (1975). Die Ursprünge des Verfahrens gehen zurück auf Cheung (1968) und Cheung (1976). Nach Wissen der Autoren stammt die erste Anwendung im Straßenwesen von Jooste (2002).

Im folgenden beschränken wir uns auf ein dreidimensionales Problem mit Ortskoordinaten  $x, y$  und  $z$ , wobei o.B.d.A.  $z$  die Koordinate sei, längs derer sich Geometrie

und Materialeigenschaften nicht ändern.  $z$  liege im Intervall  $0 \leq z \leq Z$ . Wie in Gleichung 2.6 interpolieren die Ansatzfunktionen das diskrete Verschiebungsfeld, allerdings werden in  $z$ -Richtung trigonometrische Funktionen anstatt von stückweise definierten Polynomen verwendet:

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = [\tilde{\mathbf{N}}(x, y, z)] \mathbf{u} \quad (2.18)$$

$$= \sum_{l=1}^{n_{FT}} \left[ \mathbf{N}(x, y) \sin \frac{\pi lz}{Z} + \mathbf{N}(x, y) \cos \frac{\pi lz}{Z} \right] \mathbf{u}. \quad (2.19)$$

Es findet also keine Diskretisierung in  $z$ -Richtung statt. Die Anzahl der Fourier-Terme, bzw. Teilschwingungen  $n_{FT}$  regelt die Approximierungsgüte in  $u$ -Richtung. Die Analogie zur Fourier-Reihe ist in Gleichung 2.19 offensichtlich.

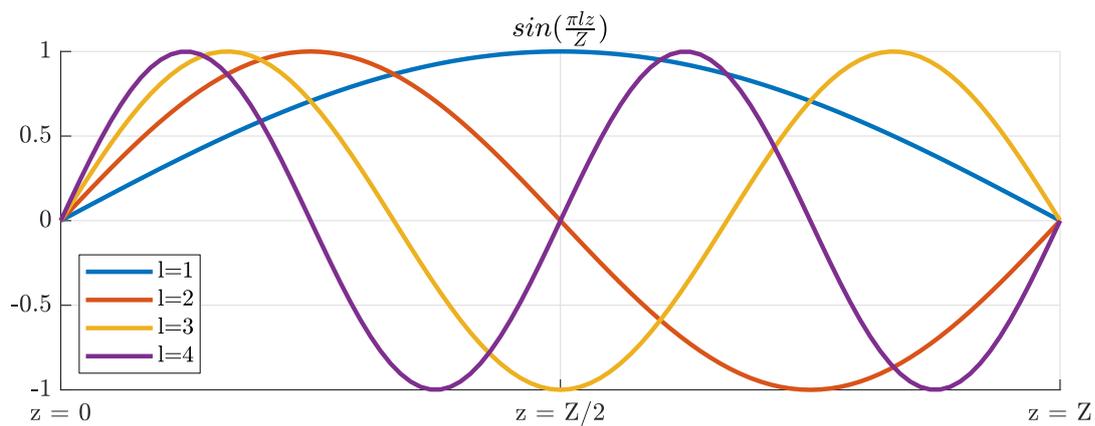
Es ergeben sich nun unterschiedliche Möglichkeiten, die trigonometrischen Anteile für die Ansatzfunktionen in den unterschiedlichen Raumrichtungen zu wählen. Dies wirkt sich direkt auf die möglichen Randbedingungen aus. Das Beispiel in Zienkiewicz (1975, Kapitel 13.2) geht von einer in  $z$ -Richtung verschieblichen Lagerung aus, Zwangsspannungen in  $z$ -Richtung können demnach nicht auftreten. Die Verschiebungen in der  $xy$ -Ebene,  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$ , werden allerdings verhindert, da  $\sin \frac{\pi lz}{Z}$  für  $z = 0$  und  $z = Z$  einen Nulldurchgang aufweist. Dieser Art der Lagerung entspricht der folgende Ansatz, der auch in Jooste (2002) und Hu u. a. (2008) sowie in SAFEM verwendet wurde

$$\bar{\mathbf{u}} = \sum_{l=1}^{n_{FT}} \sum_{i=1}^{n_N} N_i \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi lz}{Z} & 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{\pi lz}{Z} & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\pi lz}{Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^l \\ \mathbf{v}_i^l \\ \mathbf{w}_i^l \end{Bmatrix}. \quad (2.20)$$

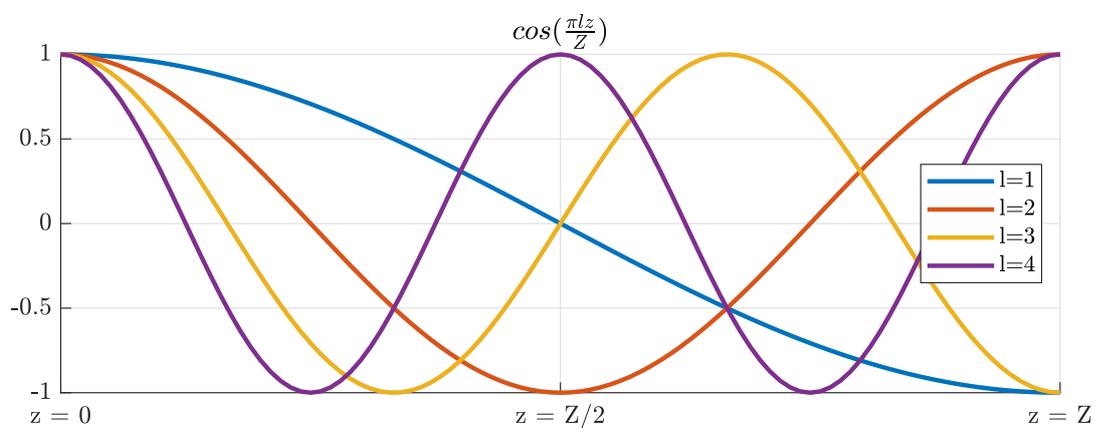
Für  $u$  und  $v$  werden die Sinus-Anteile und für  $w$  die Cosinus-Anteile verwendet. Da es sich nicht um eine volle Entwicklung in Fourier-Reihen der Verschiebungen handelt, resultieren aus diesem Ansatz einige für Straßenaufbauten relevante Restriktionen gegenüber einem echten 3D-Problem:

- Verschiebungen  $w$  für  $z = 0$  und  $z = Z$  sind möglich. Aufgrund von Spannungsumlagerungen, insbesondere Schubübertragung sollten diese allerdings weit weg von der Last verschwinden.
- Die Vorgabe von Verschiebungsrandbedingungen für  $\mathbf{w}$  ist darüber hinaus nicht möglich. Daher ist auch eine weitere Reduktion auf ein 1D Problem nicht möglich.

Nach Meinung der Autoren wäre jedoch der Ansatz folgende Ansatz sinnvoller, bei dem sämtliche Verschiebungen für  $z = 0$  und  $z = Z$  verhindert werden.



(a) Für gerade  $l$  weisen die Teilschwingungen der Sinus-Reihe bei  $z = Z/2$  einen Nulldurchgang auf.



(b) Für ungerade  $l$  weisen die Teilschwingungen der Cosinus-Reihe bei  $z = Z/2$  einen Nulldurchgang auf.

Bild 2.2: Erste 4 harmonische Teilschwingungen von Sinus (oben) und Cosinus (unten).

$$\bar{\mathbf{u}} = \sum_{l=1}^{n_{FT}} \sum_{i=1}^{n_N} N_i \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi lz}{Z} & 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{\pi lz}{Z} & 0 \\ 0 & 0 & \sin \frac{\pi lz}{Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^l \\ \mathbf{v}_i^l \\ \mathbf{w}_i^l \end{Bmatrix}. \quad (2.21)$$

Der Ansatz wurde auch implementiert, kann allerdings die Verschiebungen  $w$  in der Mitte der Domäne bei  $z = \frac{Z}{2}$  nicht approximieren. Wie im Abschnitt Abschnitt 2.1.5 dargestellt wird sind alle geraden Koeffizienten der Fourier-Reihe der rechteckigen Reifenlasten Null. Wie in Bild 2.2a sind es allerdings gerade die geraden Teilschwingungen der Sinus-Reihe, die dort den Nulldurchgang haben. Eventuell besteht Abhilfe darin, die Lastfunktionen so zu wählen, dass auch die ungeraden Koeffizienten  $\neq 0$  sind. Das wurde dahingehen probiert, dass die Last außermittig gesetzt wurde. Hier sind zusätzliche Untersuchungen notwendig.

Der Vorteil der Methode liegt darin, dass das Volumenintegral in Gleichung 2.16 aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der Fourier-Reihe in einzelne Teilprobleme zerfällt. In Bild 2.1b ist im vergrößerten Ausschnitt zu sehen, dass die Matrizen der einzelnen Fourierglieder voneinander unabhängig sind. Es ergibt sich also kein globales Gleichungssystem wie in Gleichung 2.17 sondern für jedes Fourierglied  $l$  ein deutlich kleineres Gleichungssystem

$$\mathbf{K}^l \mathbf{u}^l = \mathbf{f}^l, \quad (2.22)$$

da die globale Steifigkeitsmatrix  $K$  entkoppelt. Die Unbekannten  $\mathbf{u}^l$  stellen dabei die Koeffizienten der Fourier-Reihe aus Gleichung 2.20 oder Gleichung 2.21 dar. Die Genauigkeit der Lösung wird in der FSFEM nicht nur über das hier zweidimensionale Netz geregelt, sondern ebenso über  $n_{FT}$ . Für jedes  $l$  wird ein Satz an Fourier-Koeffizienten bestimmt. Die Norm von  $\mathbf{u}^l$  nimmt dabei mit steigendem  $l$  ab da die Amplituden der höherfrequenten Teilschwingungen im Allgemeinen nicht mehr so hoch ausfallen wie die der niederfrequenten. Ein sinnvoller allgemeingültiger Wert für  $n_{FT}$  lässt sich nicht angeben. Daher ist es sinnvoll hier ein Abbruchkriterium als Verhältnis der Amplitude ersten zur  $l$ -ten Teilschwingung zu definieren. Der Code rechnet so lange, bis

$$\frac{\|\mathbf{u}^l\|_2}{\|\mathbf{u}^1\|_2} < tol. \quad (2.23)$$

Da die Koeffizienten zunächst im Frequenzraum vorliegen ist eine Transformation in den geometrischen Raum notwendig. Dies geschieht durch einfache Anwendung der Formeln Gleichung 2.20 oder Gleichung 2.21.

Durch die Verwendung trigonometrischer Ansatzfunktionen verändern sich die Ableitungsoperatoren nach Gleichung 2.11. Bei Verwendung von Gleichung 2.20 ergibt sich

$$\mathbf{B}_i^l = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \sin \gamma z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \sin \gamma z & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma N_i \sin \gamma z \\ 0 & \gamma N_i \cos \gamma z & \frac{\partial N_i}{\partial y} \cos \gamma z \\ \gamma N_i \cos \gamma z & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \cos \gamma z \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \sin \gamma z & \frac{\partial N_i}{\partial x} \sin \gamma z & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

mit  $\gamma = \frac{\pi l}{Z}$ . Allerdings wird diese Matrix im Code so niemals aufgestellt.  $\mathbf{B}_i^l$  kann auf folgende Weise zerlegt werden:

$$\mathbf{B}_i^l = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\pi}{Z} N_i \\ 0 & \frac{\pi}{Z} N_i & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\pi}{Z} N_i & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}_i} \circ \underbrace{\begin{bmatrix} \sin \gamma z & 0 & 0 \\ 0 & \sin \gamma z & 0 \\ 0 & 0 & \sin \gamma z \\ 0 & \cos \gamma z & \cos \gamma z \\ \cos \gamma z & 0 & \cos \gamma z \\ \sin \gamma z & \sin \gamma z & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}_{\text{trig}}} \circ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l \\ 0 & l & 1 \\ l & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}^l}. \quad (2.25)$$

Dabei kennzeichnet  $\circ$  die elementweise Multiplikation (Hadamard-, oder Schur-Produkt). Das Matrixprodukt der trigonometrischen Terme erhält dabei die Struktur

$$\mathbf{B}_{\text{trig}}^\top \mathbf{B}_{\text{trig}} = \begin{bmatrix} 2 \sin^2 \gamma z + \cos^2 \gamma z & 2 \sin^2 \gamma z & \sin^2 \gamma z + \cos^2 \gamma z \\ 2 \sin^2 \gamma z & 2 \sin^2 \gamma z + \cos^2 \gamma z & \sin^2 \gamma z + \cos^2 \gamma z \\ \sin^2 \gamma z + \cos^2 \gamma z & \sin^2 \gamma z + \cos^2 \gamma z & \sin^2 \gamma z + 2 \cos^2 \gamma z \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Beim Einsetzen von Gleichung 2.24 in Gleichung 2.16 treten also nur die Integrale

$$\int_0^Z \sin^2 \gamma z \, dz = \int_0^Z \cos^2 \gamma z \, dz = \frac{Z}{2} \quad (2.27)$$

auf. Daher vereinfacht sich das Volumenintegral der Elementsteifigkeitsmatrix durch den Ansatz aus Gleichung 2.20 zu einem Flächenintegral

$$\int_V \mathbf{B}^\top \mathbb{C} \mathbf{B} \, dV = \frac{Z}{2} \int_A \left( \tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{B}}^l \right)^\top \mathbb{C} \left( \tilde{\mathbf{B}} \circ \tilde{\mathbf{B}}^l \right) \, dA. \quad (2.28)$$

Die Integration erfolgt mit in der FEM üblichen Standardverfahren. Implementiert sind die Integrationen über Dreiecke und Quadrilaterale erster und zweiter Ordnung.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass einige Einschränkungen bezüglich der Randbedingungen wegfallen, wenn die Anzahl der Verschiebungsparameter verdoppelt

wird. Diese Möglichkeit wird in Zienkiewicz (1975, Gleichung 13.21) für kartesische Koordinaten und in Potts und Zdravkovic (1999, Gleichung 12.2) für Zylinderkoordinaten angegeben. Als Einschränkung ergibt sich der doppelte Rechenaufwand, daher wurde der Ansatz nicht verfolgt.

### 2.1.5 Reifenlasten

Nach Zienkiewicz (1975, Gl. 13.2) werden die Belastungsgrößen in folgende Form entwickelt:

$$\mathbf{p} = \sum_{l=1}^{n_{FT}} \left[ a^l(x, y) \cos \frac{\pi lz}{Z} + b^l(x, y) \sin \frac{\pi lz}{Z} \right] \quad (2.29)$$

Die Reifenlasten werden als Rechteckschwingung angenommen (konstante Flächenpressung). Die Fourierreihe einer Rechteckschwingung ist eine Sinus-Reihe, vgl. (Meyberg und Vachenaer 2001, Kap. 11.2) sowie die Arbeiten von Jooste (2002) und Hu u. a. (2008). Die Fourier-Koeffizienten lassen sich dabei für die Berücksichtigung von Rechteckfunktionen in die folgende Form entwickeln:

$$b^l = \frac{2}{l\pi} \sum_{t=1}^{n_T} P_t \left[ \cos \frac{\pi lz_t^{ini}}{Z} - \cos \frac{\pi lz_t^{end}}{Z} \right] \quad (2.30)$$

Hierbei steht  $n_T$  für die Anzahl der Lasten in Fourier-Richtung,  $P_t$  für die  $t$ -te Lastamplitude (Kontaktdruck) und  $z_t^{ini}$  sowie  $z_t^{end}$  jeweils für die Startposition und Endposition der Reifenlast  $t$ . Falls nun die Last mittig positioniert wird verschwinden die zugehörigen Koeffizienten für gerade  $l$ , da geradzahlige Teilschwingungen des Cosinus symmetrisch um  $z = Z/2$  sind, bzw. der Sinus dann einen Null-Durchgang aufweist (siehe Bild 2.2):

$$b^l \begin{cases} \neq 0, & \text{falls } l \text{ ungerade,} \\ = 0, & \text{falls } l \text{ gerade.} \end{cases} \quad (2.31)$$

In Bild 2.3 sind zwei in  $z$ -Richtung hintereinanderliegende Rechtecklasten dargestellt, die mit 30, 100 und 270 Fourier-Termen approximiert werden. Die zu sehenden Überschwinger sind als Gibbs'sches Phänomen<sup>1</sup> bekannt und verschwinden mit steigender Anzahl an Fourier-Gliedern nicht, siehe hierzu auch Potts und Zdravkovic (1999, S. 394).

Hier stellt sich die Frage ob es bei simplen Topflasten bleiben soll, oder ob auch komplexere Lastabdrücke berücksichtigt werden sollen. Die in Woodside u. a. (1992), de Beer

<sup>1</sup>[https://de.wikipedia.org/wiki/Gibbssches\\_Ph%C3%A4nomen](https://de.wikipedia.org/wiki/Gibbssches_Ph%C3%A4nomen)

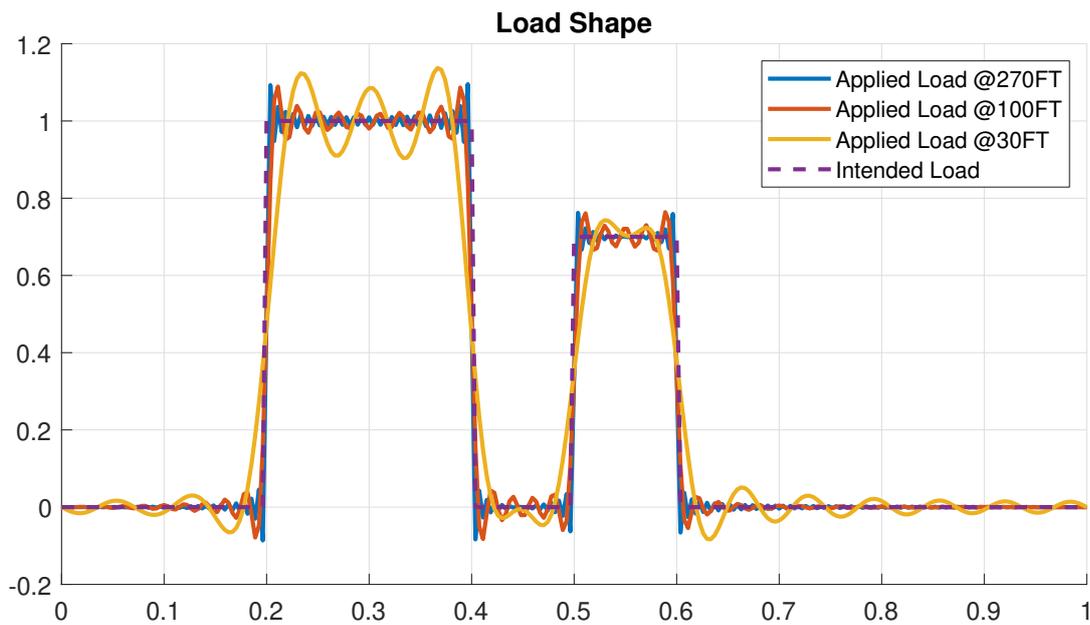


Bild 2.3: Beispiel für zwei Rechtecklasten unterschiedlicher Länge und Amplitude, die mit unterschiedlichen Anzahlen an Fouriерtermen approximiert werden.

und Fisher (1997), Siddharthan u. a. (1998), Blab und Harvey (2002) und Mo u. a. (2007) dargestellten Lastabdrücke ließen sich mutmaßlich ohne nennenswerte Überschwinger mittels Fourier-Reihen approximieren. Analytische Formen existieren beispielsweise mit der „Haversine“-Formel nach Huang (2004, S. 88). Allerdings urteilen beispielsweise Siddharthan u. a. (1998), dass die Spannungsverteilung in der Reifen-Fahrbahn-Kontaktfläche keinen signifikanten Einfluss auf die Biegezugdehnungen an der Unterseite des Asphaltpaketes hat.

Die Querverteilung der Reifenlasten geschieht dann über das zweidimensionale FE-Netz, wobei derzeit die Abbildung von rechteckigen Reifenabdrücken implementiert ist. Wie in Liu, Wang u. a. (2017) angedeutet können grundsätzlich aber auch runde und/oder elliptische Aufstandsflächen modelliert werden. Hierzu müssen  $z_t^{ini}$  und  $z_t^{end}$  als Funktion der Querrichtung aufgestellt werden. Dies ermöglicht auch, dass Reifen in Querrichtung versetzt zueinander angeordnet werden können.

## 2.1.6 Umgang mit Verschiebungsrandbedingungen

Üblicherweise treten bei Simulationen im Verkehrswegebau keine Verschiebungsrandbedingungen auf, die nicht der trivialen Bedingung  $u = 0$  gehorchen. Zwecks Verifikation der implementierten Materialgesetze, insbesondere zur Nachrechnung der Relaxation des in Abschnitt 2.3 beschriebenen generalisierten Maxwell Modells, ist es jedoch nötig mit allgemeinen Verschiebungsrandbedingungen umgehen zu können. Hierzu wurde das von Oñate (2009, Kap. 1.10) beschriebene Verfahren in Variante **a** implementiert.

Die Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}$  werden in freie,  $\mathbf{u}_f$  und bekannte  $\mathbf{u}_b$  Verschiebungen unterteilt. Im globalen Gleichungssystem  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$  werden die Zeilen (Gleichungen) so umsortiert, dass die folgende Struktur erhalten wird:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fb} \\ \hline \mathbf{K}_{bf} & \mathbf{K}_{bb} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_b \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}_f \\ \mathbf{f}_b \end{array} \right\} . \quad (2.32)$$

Jetzt der kann obere Teil von Gleichung 2.32 nach den freien Verschiebungen aufgelöst werden

$$\mathbf{K}_{ff}\mathbf{u}_f + \mathbf{K}_{fb}\mathbf{u}_b = \mathbf{f}_f \quad (2.33)$$

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{K}_{ff}^{-1}(\mathbf{f}_f - \mathbf{K}_{fb}\mathbf{u}_b) \quad , \quad (2.34)$$

anschließend wird der untere Teil von Gleichung 2.32 zur Berechnung der Reaktionskräfte an den Knoten mit vorgegebenen Verschiebungen,  $\mathbf{f}_b$  verwendet.

## 2.1.7 Temperaturverläufe

Temperaturverläufe über die Dicke werden derart berücksichtigt, dass dem Code mehrere Arrays übergeben werden, in denen die Höhe, die dazugehörige Steifigkeit und die dazugehörige Querdehnzahl enthalten sind. Die Anzahl ist beliebig erweiterbar. Während der Aufstellung der wiederverwendbaren Teile der Elementsteifigkeitsmatrizen werden die mittleren Höhen der Elemente,  $\bar{h}_{el}$ , als arithmetischer Mittelwert berechnet.

$$\bar{h}_{el} = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^{nN} h_i \quad (2.35)$$

Auf Basis von  $\bar{h}_{el}$  werden die übergebenen Materialparameter anschließend linear interpoliert und dem jeweiligen Element zugewiesen. Eine Alternative hierzu wäre die Implementierung auf GP-Ebene. Dies erfordert allerdings die globale Tiefeninformaton am GP. Das ist gar nicht so leicht zu implementieren, da den GP i.d.R. nur seine Position in lokalen Elementkoordinaten interessiert. Aktuell wird wie oben angegeben verfahren.

## 2.1.8 Typische Struktur von linearen FEM-Rechenkernen

Ein klassisches finite Elemente Programm ist typischerweise wie in Bild 2.4a strukturiert. Insbesondere wird die Funktion, welche die Elementsteifigkeitsmatrix berechnet, für jedes Element genau einmal aufgerufen. Verschiedene Implementierungen unterscheiden sich natürlich im Detail. So ist es in `Matlab` beispielsweise nicht sinnvoll die globale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  iterativ zu assemblieren. Deutlich performanter ist hingegen die direkte Konstruktion<sup>2</sup> von  $\mathbf{K}$ . Obwohl die Elementschleife parallelisiert werden kann entsteht dadurch ein Flaschenhals bei der Assemblierung.

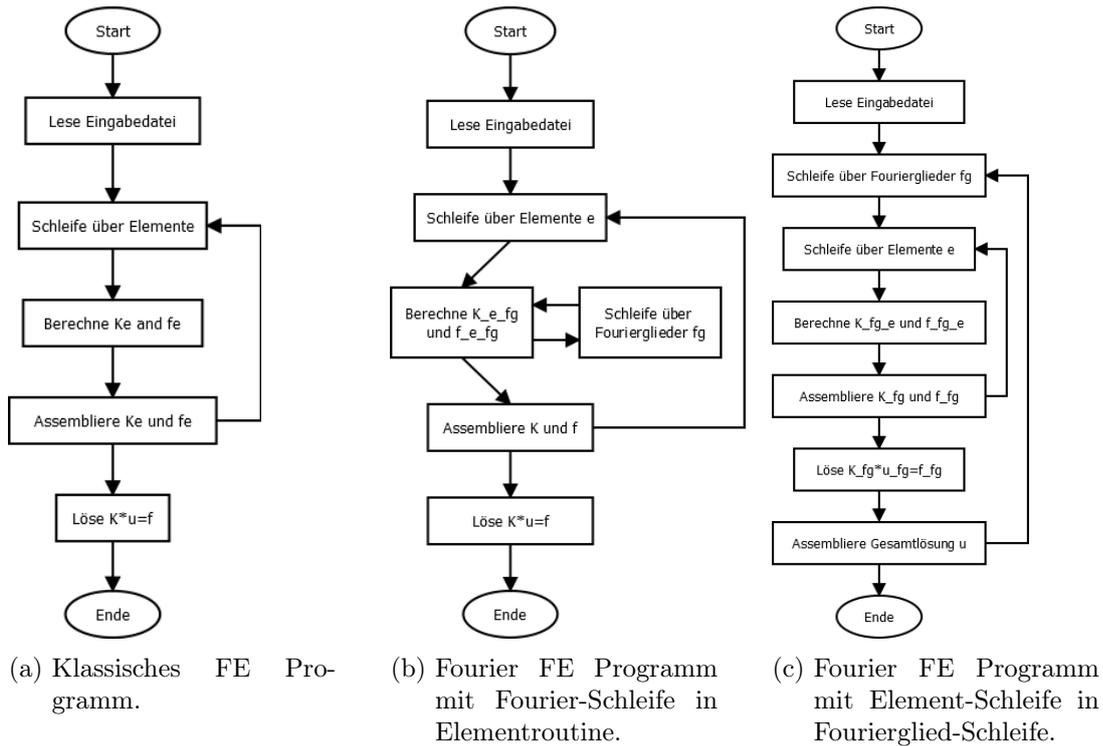


Bild 2.4: Flussdiagramme von klassischen und Fourier-Unterstützten FE-Codes.

Durch die `FSFEM` ergeben sich hier jetzt verschiedene Möglichkeiten, die sich möglicherweise drastisch in der Laufzeit und ihrem Potential zur Parallelisierung unterscheiden. Aktuell sind die in Bild 2.4b und Bild 2.4c dargestellten Varianten implementiert. Diese werden im Folgenden als `FSFEMa` und `FSFEMb` bezeichnet. In `FSFEMa` wird in jedem Element über die Fourier-Terme iteriert. Die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen ist parallelisiert. Das hat den Vorteil, dass die B-Matrizen sowie die Determinante der Jacobi-Matrix nur einmal pro Element berechnet werden müssen. Als nachteilig hat sich herausgestellt, dass die globale Steifigkeitsmatrix assembliert werden muss und

<sup>2</sup>Vgl.: <https://scicomp.stackexchange.com/questions/5202/efficient-assembly-of-finite-element-matrix-in-matlab>, sowie <https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/sparse.html>

dies, sowie das Lösen des Gleichungssystems, einen signifikanten Anteil der Laufzeit in Anspruch nehmen. Die Lösung erfolgt zwar parallel mittels UMFPACK<sup>3</sup>, jedoch wird die Struktur des Gleichungssystems nicht genutzt. Die Assemblierung lässt sich nach derzeitigem Kenntnisstand nicht parallelisieren.

In **FSFEMb** wird die Steifigkeitsmatrix jeweils für ein Fourierglied erstellt, welche dann aufgrund des Zerfallens des Gleichungssystems sofort für jeden Term gelöst werden kann und keine globale Steifigkeitsmatrix erstellt werden muss. Potentiell nachteilig ist bei dieser Variante, dass für jeden Fourier-Term viele Berechnungsschritte erneut ausgeführt werden müssen. Um dies zu umgehen ist es nötig verschiedene Zwischenschritte für die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen zwischenzuspeichern, dies sind Teile der B-Operatoren,  $\det(\mathbf{J})$  und die Gewichte der Gausspunkte.

In Abschnitt 2.1.10 wird gezeigt, dass **FSFEMb** bereits im Single-Thread Betrieb schneller ist als **FSFEMa** und dieser wiederum bereits deutlich schneller ist als **SAFEM**. In Abschnitt 2.1.11 wiederum wird dargestellt, dass **FSFEMb** deutlich besser mit der Anzahl der benutzten Threads skaliert als **FSFEMa**.

## 2.1.9 Verifikation der FSFEM

### Verifikation mittels geschlossener Lösung

Hier kommt es zunächst nicht auf die Performance des entwickelten Codes an, sondern nur darum, ob richtig gerechnet wird. Da Randbedingungen in die Raumrichtung der analytischen Integration erhalten bleiben, ist die Auswahl an möglichen geschlossenen Lösungen stark eingeschränkt. Eine Möglichkeit besteht darin einen — in die Raumrichtung der analytischen Integration — Zustand asymptotischer ebener Dehnung hervorzurufen. Ebene Dehnung ist dadurch gekennzeichnet, dass drei der insgesamt sechs Komponenten des Dehnungstensors null sind. Im Folgenden wird das lineare Dehnungsmaß

$$\boldsymbol{\epsilon} = \text{sym}(\text{grad}(\mathbf{u})) \quad (2.36)$$

verwendet, wobei  $\mathbf{u}$  den Verschiebungsvektor und  $\mathbf{x}$  den Ortsvektor bezeichnet.

Die Umkehrung der Gleichung Gleichung 2.4 lautet

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbb{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{S}\boldsymbol{\sigma}, \quad (2.37)$$

mit dem Nachgiebigkeitstensor  $\mathbb{S}$ . Dieser ist wie folgt definiert

---

<sup>3</sup><http://faculty.cse.tamu.edu/davis/research.html>

$$\mathbb{S} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Die Geometrie und die Randbedingungen des Verifizierungsproblems sind in Bild 2.5 dargestellt. Für die Ausdehnung in z-Richtung wird 20 mm angenommen. Daher sollte sich in einem Schnitt in der xy-Ebene bei z=10 mm ein Zustand ebener Dehnung einstellen.

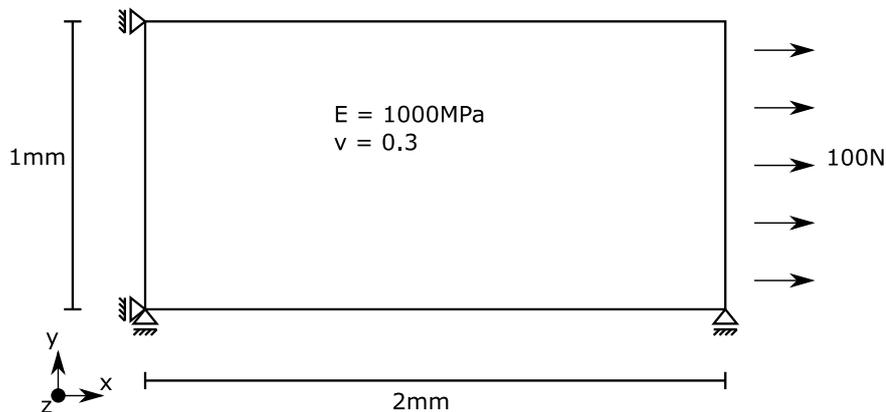


Bild 2.5: Geometrie und Randbedingungen des Verifizierungsproblems.

Für die geschlossene Lösung mittels ebener Dehnung wird  $t = 1 \text{ mm}$  angenommen. Aus Gleichgewichtsgründen folgt, dass die Spannung in x-Richtung,  $\sigma_x$ , 100 MPa beträgt. Die Spannung in y-Richtung beträgt aufgrund des freien Randes 0 MPa. Die Dehnung in z-Richtung ist behindert und beträgt ebenfalls 0. Des weiteren verschwinden alle Schubkomponenten ( $\sigma$  und  $\epsilon$ ). Mit Hilfe von Gleichung 2.37 ergeben sich die Dehnungskomponenten zu

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \quad (2.39)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z) \quad (2.40)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad (2.41)$$

woraus folgt

$$\sigma_z = 30 \text{ MPa} \quad (2.42)$$

$$\epsilon_x = 0.091 \quad (2.43)$$

$$\epsilon_y = -0.039 \quad (2.44)$$

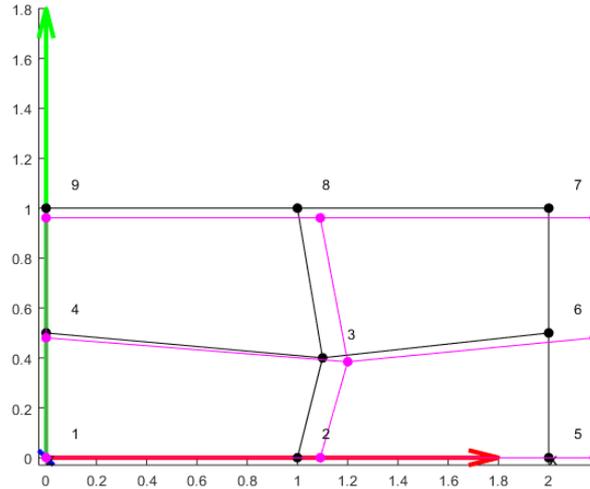


Bild 2.6: Ursprungs- (schwarz) und deformierte (magenta) Konfiguration des Verifizierungsproblems ebene Dehnung für 4 lineare Quadrilaterale.

Im Folgenden wird die Verschiebung des Knotens 7,  $u_x^7$ , analysiert.

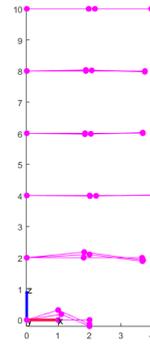
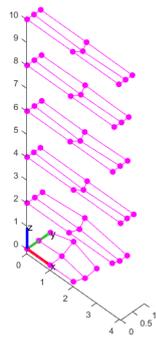
Komponente	numerisch [mm]	analytisch [mm]	absoluter Fehler [mm]
x	1 8198E-01	1 8200E-01	2 0E-05
y	-3 8999E-02	-3 9000E-02	1 0630E-06
z	2 5428E-18	0 0000E+00	2 5428E-18

Tabelle 2.1: Numerisch und analytisch bestimmte Verschiebungen des Knotens 7, sowie absoluter Fehler. Schnitt für  $z = 10 \text{ mm}$  und 100 Fourier-Terme.

In den folgenden beiden Ansichten sind Schnitte bei verschiedenen z-Koordinaten zu sehen. Hier ist auch bereits ein Problem des gewählten Ansatzes zu sehen. Die sin-Terme in x- und y-Richtung verhindern eine Verschiebung bei  $z=0$ . Hier sind nur Verschiebungen in z-Richtung möglich. Andererseits sind Verschiebungen in z-Richtung für  $z = c/2$  behindert, da  $\cos(\pi l/c) = 0$ .

Zuletzt wird der Einfluss der Anzahl an Fouriergliedern auf die Verschiebung untersucht. Der relative Fehler ist für eine Verschiebung  $u$  wie folgt definiert

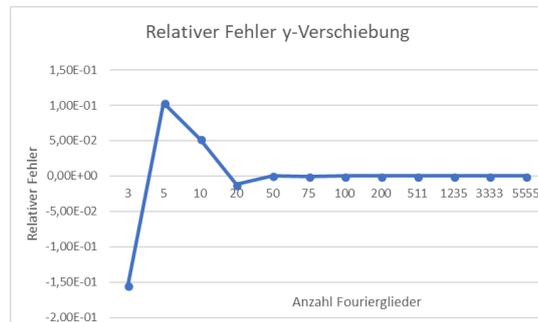
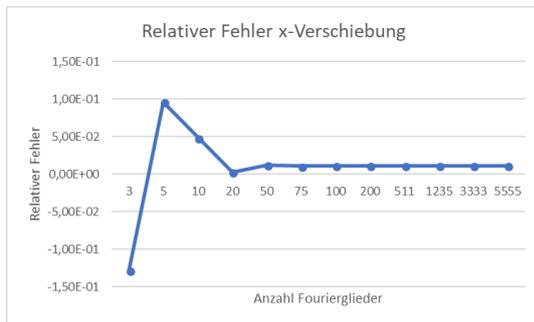
$$\delta_u = \frac{u_{fg}^{num} - u^{ana}}{u^{ana}} \quad (2.45)$$



(a) Isometrische Ansicht verschiedener Schnitte durch das Beispielproblem. (b) Ansicht verschiedener Schnitte in y-Richtung des Beispielproblems.

Bild 2.7: Ansichten äquidistanter Schnitte in der x-y-Ebene des Verifikationsproblems. Die Deformation ist 10fach überhöht dargestellt.

In Bild 2.8 ist zu sehen, dass sich  $\delta_u$  ab ca. 50 Fouriergliedern nicht mehr ändert. Dies liegt mit Sicherheit aber auch an der einfachen Lastverteilung. Für kompliziertere Lasten ist mit einer höheren Anzahl an Fouriergliedern zu rechnen. Was ausreichend ist, muss im Einzelfall entschieden werden und unterscheidet sich somit nicht von Studien der Netzkonvergenz für klassische FE-Probleme. Der relative Fehler der Verschiebung in z-Richtung kann aufgrund der Division durch 0 nicht angegeben werden.



(a) Relativer Fehler der Verschiebung in x-Richtung. (b) Relativer Fehler der Verschiebung in y-Richtung.

Bild 2.8: Relativer Fehler der Verschiebung von Knoten 7.

## Vereinfachter Straßenaufbau

Als Beispielproblem wird ein deutlich vereinfachter Straßenaufbau betrachtet um eine schnelle Lösung des Problems zu garantieren und Fehlerquellen zu eliminieren. Daher wurde hier ein simpler Quader gewählt, der zunächst aus einer Schicht, später dann aus zwei Schichten mit unterschiedlichen Materialeigenschaften besteht. Eine quadratische homogene Flächenlast wird zentriert auf der Mitte der Oberseite aufgebracht, siehe oranges Quadrat in Bild 2.9.

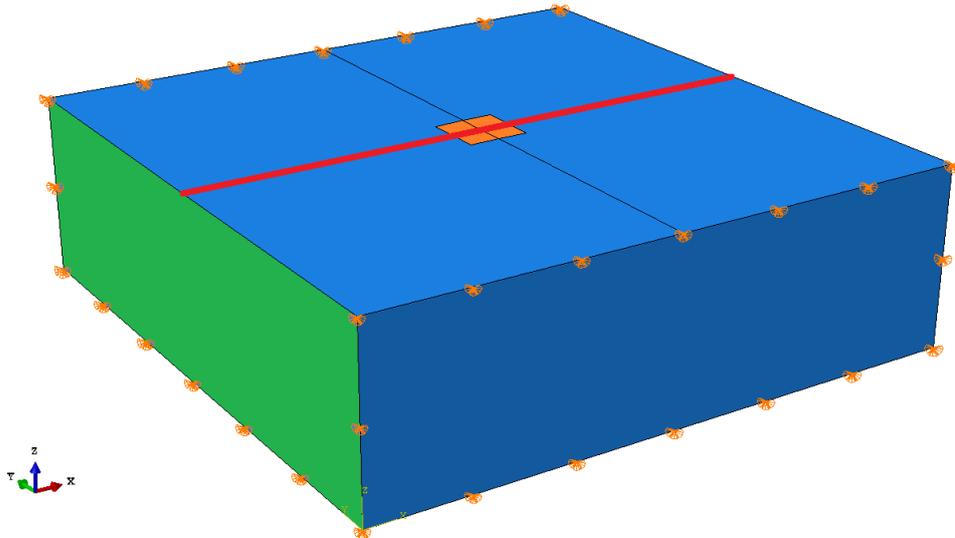


Bild 2.9: Darstellung des vereinfachten Straßenaufbaus.

Die Parameter des Beispielproblems sind in Tabelle 2.2 aufgeführt. Als Randbedingung wurden alle Freiheitsgrade auf der Unterseite der Struktur festgehalten. Weiterhin wurden verschiedene Verschiebungsrandbedingungen auf den Seitenflächen mit Normalen in  $x$ - und  $y$ -Richtung verwendet, um die durch FSFEM eingeführten Einschränkungen abbilden zu können. Wie in Bild 2.9 zu sehen ist wurden immer die Flächen mit Normalen in  $y$ -Richtung fixiert. In  $x$ -Richtung (grüne Fläche) wurden die Verschiebungen mal fixiert und mal nicht.

Im Folgenden wird angenommen, dass es sich bei der  $x$ -Richtung um die Längsrichtung der Straße handelt. In dieser Richtung wird der Fourier-Ansatz verwendet. Das 2D-FE-Netz existiert also in der  $y - z$ -Ebene.

**3D FEM Netzkonvergenzstudie** Zur Ermittlung von verlässlichen Werten für die Verifikation wurde eine Netzkonvergenzstudie am homogenen Quader ( $E = 1000 \text{ MPa}$ ) durchgeführt. Mit diesen Parametern wird das Verhalten einer Asphaltstraße bei hohen Temperaturen modelliert.

Tabelle 2.2: Parameter des Beispielproblems Vereinfachter Straßenaufbau.

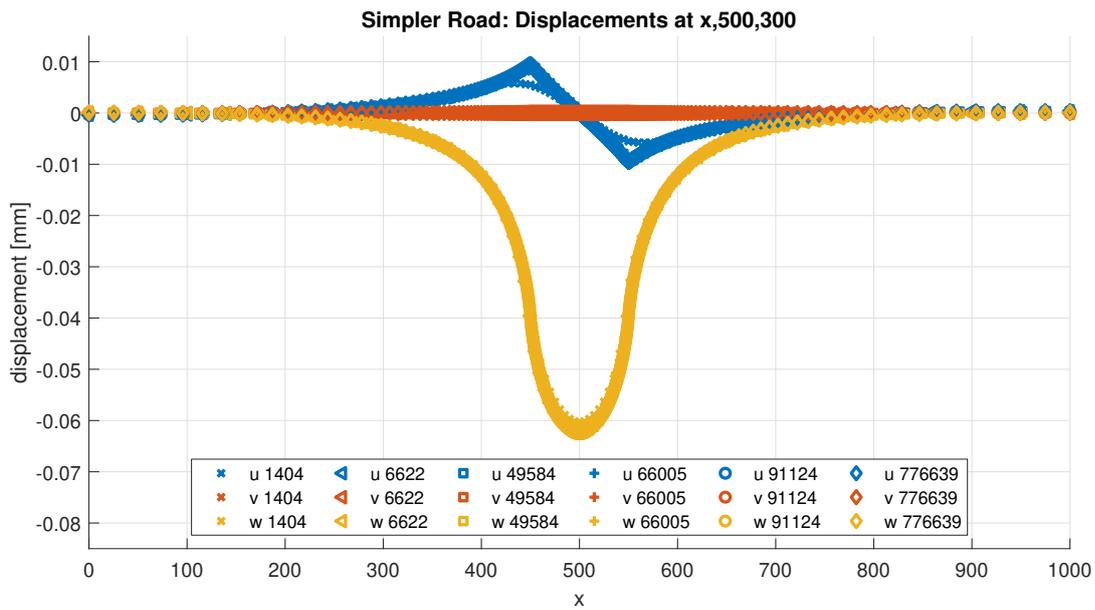
Parameter	Wert
x-Ausdehnung	1000 mm
y-Ausdehnung	1000 mm
z-Ausdehnung	300 mm
x-Ausdehnung Lastabdruck	100 mm
y-Ausdehnung Lastabdruck	100 mm
Flächenpressung	0,7 MPa
E-Modul oben	1000 MPa bis 10 000 MPa
E-Modul unten	1000 MPa
Querkontraktion	0,3

Zunächst wurde der Aufbau derart gewählt, dass die Verschiebungen auf den Flächen mit Normale in x-Richtung nicht fixiert sind. Dies wurde bewusst untersucht um abzuschätzen, welchen Einfluss die unterschiedlichen Lagerungen haben. Der Ansatz Gleichung 2.20 ermöglicht nur Verschiebungen in x-Richtung, daher ist anzunehmen, dass die Unterschiede drastischer ausfallen als mit dem FSFEM-Ansatz.

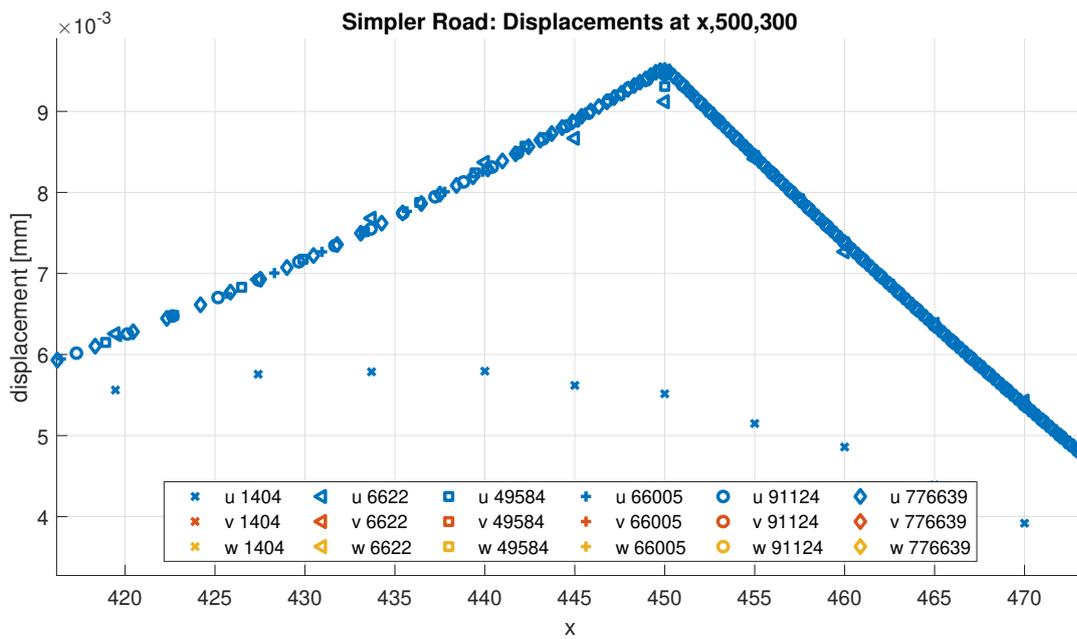
Es wurden sechs verschiedene Netze erstellt. Das größte Netz besteht aus 1404 Hexaedern. Es wurde nur ein Hexaedernetz verwendet, da die lokale Verfeinerung an der Lastaufstandsfläche mit Tetraedern besser gelingt. Das feinste Netz besteht aus 776639 Tetraedern. Es wurden ausschließlich Elemente zweiter Ordnung verwendet. Wie in Konvergenzstudien üblich wurden die ungemittelten Spannungen und Dehnungen an den Integrationspunkten ausgewertet. Alle im Folgenden gezeigten Werte wurden entlang eines Pfades in x-Richtung bei  $y = 500$  mm und  $z = 300$  mm (rote Linie in Bild 2.9) aufgezeichnet. In Bild 2.10a sind die Verschiebungen dargestellt. Deutlich ist zu sehen, dass es auf der Oberfläche des Quaders eine punktsymmetrische Bewegung hin zur Lastaufstandsfläche gibt. Die Verschiebungen  $v$  verschwinden aus Gründen der Symmetrie entlang des Pfades. Die Verschiebungen  $w$  zeigen eine typische Einsenkungsmulde.

Erst auf einem Ausschnitt der Darstellung zeigen sich die Unterschiede zwischen den Netzen deutlicher, siehe Bild 2.10b. Das größte Netz kann den Knick in  $u$  an den Grenzen der Lastaufstandsfläche nicht reproduzieren. Spätestens ab 66005 Elementen sind auf dieser Zoomstufe keine Unterschiede mehr zu erkennen. Die charakteristische Elementgröße (Kantenlänge) wird mit  $cl$  bezeichnet. Bei 66005 Elementen ist  $cl = 3$  mm im Bereich der Lastaufstandsfläche.

Interessanter wird es bei der Betrachtung der Spannungen. Da die Spannungen ebenso wie die Dehnungen über die Ableitung der Verschiebung nach dem Ort definiert sind, ist es üblicherweise schwieriger hier eine Konvergenz zu erreichen. Dies zeigt sich auch bei der Betrachtung von Bild 2.11, wo deutliche Ausreißer in den Randbereichen der



(a) Übersicht.



(b) Vergrößerte Darstellung des Randbereichs der Lastfläche.

Bild 2.10: Darstellung der Verschiebungen entlang des Pfades.

Lastfläche zu sehen sind. Insbesondere bei mittleren Elementzahlen kommt es hier zu Artefakten. Sehr grobe Netze können die Gradienten gar nicht richtig abbilden und feine Netze konvergieren wieder zu gemäßigteren Werten.

Da im Rahmen der RDO vor allem das Verhalten der Spannungen in der Straßenebene in der Lastachse interessiert, werden in Bild 2.11b ebenjene Spannungskomponenten vergrößert dargestellt. Zweierlei Dinge fallen auf: Erstens sind auf dieser Vergrößerungsstufe ab 66005 Elementen optisch keine Unterschiede mehr feststellbar. Zweitens konvergieren die Spannungen in  $x$ -Richtung gegen einen anderen Wert als die in  $y$ -Richtung. Letzteres wird den unterschiedlichen Randbedingungen zugeschrieben. Nichtsdestotrotz liegen die einzelnen Werte sehr nah beieinander.

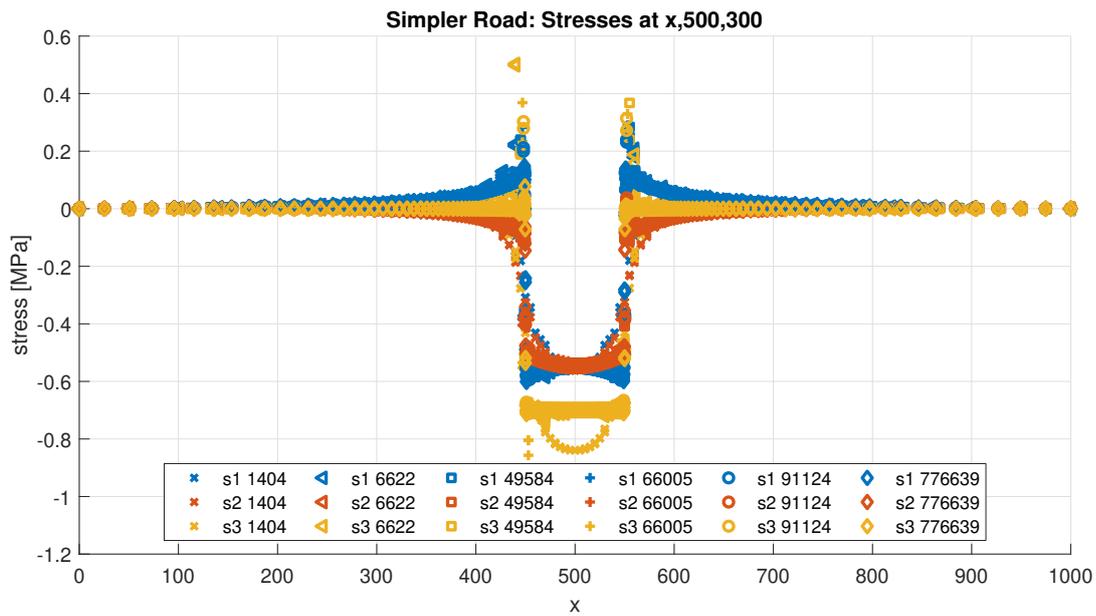
**Untersuchung des Einfluss unterschiedlicher Randbedingungen** Um den Einfluss unterschiedlicher Lagerungsbedingungen auf den Spannungszustand in der Lastachse abzuschätzen wurden ebenfalls die Verschiebungen auf den Stirnflächen mit Normale in  $x$ -Richtung fixiert, siehe grüne Fläche in Bild 2.9. Damit sind auf den Außenflächen nur noch die Verschiebungen auf der Oberseite der Struktur nicht fixiert. Diese Art der Lagerung sollte die realen Bedingungen eines Ausschnitts aus einer Straße am besten abbilden. Als Netzdichte wurden die als ausreichend konvergiert erachteten 66005 Tetraeder mit quadratischen Ansatzfunktionen gewählt.

Die Verschiebungen sind nahezu identisch. Die in Bild 2.10 bei  $x = 0$  und  $x = 1000$  erkennbaren marginalen Verschiebungen in  $x$ -Richtung verschwinden erwartungsgemäß.

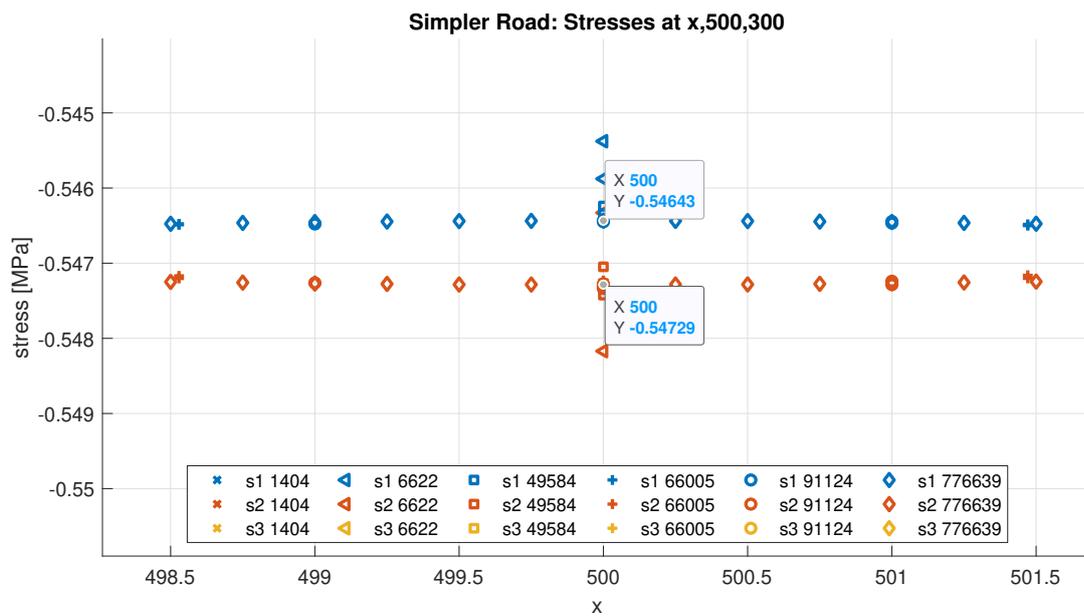
Die Spannungen zeigen auf einer hohen Zoomstufe geringfügige Unterschiede. Während  $\sigma_z$  für beide Lagerungsarten erwartungsgemäß 0,7 MPa annimmt, differieren  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  zwischen den beiden Lagerungsarten, siehe Bild 2.12. Es wird angenommen, dass die Spannungen in der  $x$ - $y$ -Ebene in der Lastachse gegen den gleichen Wert konvergieren sollten. Die Mittelwerte und Standardabweichungen sind in Tabelle 2.3 angegeben. Auf vier signifikante Stellen genau sollte dann die ebenen Spannungen gegen einen Wert von  $-0,5473$  MPa konvergieren, siehe auch Bild 2.11b.

Tabelle 2.3: Mittelwerte und Standardabweichungen der als konvergiert erachteten Spannungen in der Lastachse für unterschiedliche Lagerungen.

Randbedingung x	$\sigma_x, \sigma_y$	$\sigma_z$
frei	$(-0,546\ 94 \pm 0,000\ 46)$ MPa	$(-0,700\ 01 \pm 0,000\ 01)$ MPa
fixiert	$(-0,547\ 34 \pm 0,000\ 04)$ MPa	$(-0,700\ 01 \pm 0,000\ 01)$ MPa



(a) Übersicht.



(b) Vergrößerte Darstellung der Spannungen im Bereich der Lastachse.

Bild 2.11: Darstellung der Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\sigma_z$  entlang des Pfades.

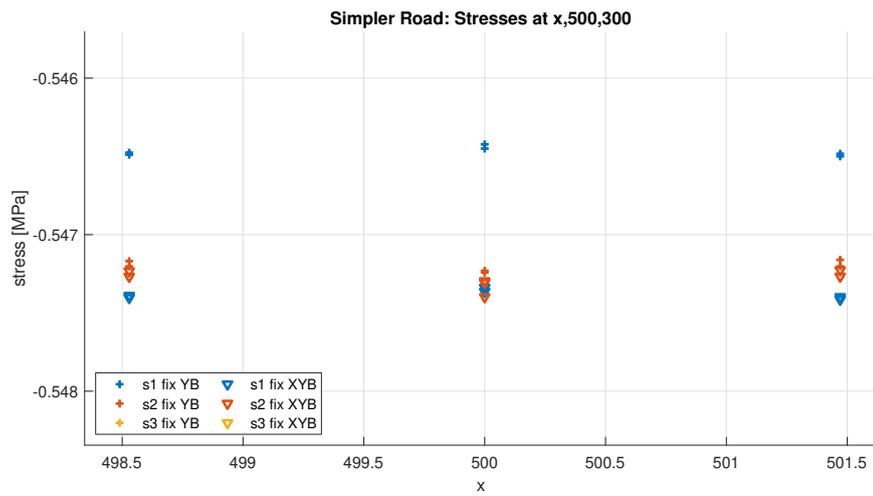


Bild 2.12: Vergrößerte Darstellung der Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  entlang des Pfades im Bereich der Lastachse für unterschiedliche Lagerungen.

**FSFEM Konvergenzstudie** Nachdem nun mittels 3D FEM Referenzwerte für die Spannungen in der Lastachse gefunden wurden, wird untersucht, inwiefern die FSFEM in der Lage ist die Werte zu reproduzieren. Zunächst wird wieder der einschichtige Aufbau mit homogenen Materialeigenschaften ( $E = 1000 \text{ MPa}$ ) verwendet. Das zweidimensionale Netz besteht aus Dreiecken 2ter Ordnung, es ist also in der Lage, genau wie das in 3D verwendete Tetraedernetz, lineare Spannungsverläufe innerhalb des Elements abzubilden.

Eine Übersicht über den Verschiebungsverlauf entlang des Pfades aus Bild 2.9 wird in Bild 2.13 gezeigt. Die mittels FSFEM berechneten Spannungen sind mit „FS“ gekennzeichnet. Es zeigt sich, dass der FSFEM-Ansatz nicht in der Lage ist die Verschiebungen  $u(x = 0 \text{ mm})$  und  $u(x = 1000 \text{ mm})$  verschwinden zu lassen. Die Verschiebungen  $w$  werden unter der Last leicht überschätzt. Mutmaßlich hängen diese Effekte zusammen. Da die Verschiebungen  $u(x = 0 \text{ mm})$  und  $u(x = 1000 \text{ mm})$  nicht verschwinden reagiert das System in  $z$ -Richtung etwas weicher als das die Lösung aus 3D FE. Ansonsten werden die Verschiebungen allerdings gut wiedergegeben.

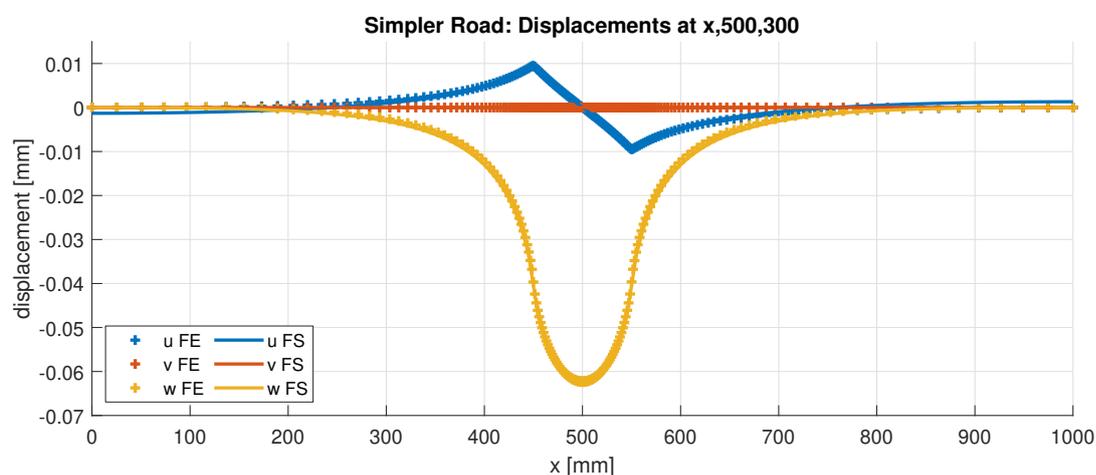


Bild 2.13: Vergleich der Verschiebungen zwischen 3D FEM und FSFEM. Für beide Netze gilt  $cl = 3$ , d.h. dass das 3D Netz wieder dem zuvor verwendeten entspricht.

Im Allgemeinen ist es deutlich schwieriger eine Konvergenz der Spannungen, als eine Konvergenz der Verschiebungen zu erreichen. Eine Übersicht über den Spannungsverlauf entlang des Pfades aus Bild 2.9 wird in Bild 2.14 gezeigt. Dort sind im Bereich der Lastaufstandsfläche Abweichungen von der 3D-Lösung zu erkennen. Da keine Projektion der Spannungen an den Integrationspunkten auf Knoten implementiert ist, werden die Werte aller drei Integrationspunkte ausgegeben. Mit steigender Elementzahl sollten diese asymptotisches Verhalten zeigen.

Das asymptotische Verhalten zeigt sich wenn man den Bereich der Lastaufstandsfläche vergrößert, wie in Bild 2.15 zu sehen ist. Mit zunehmender Netzdichte, bzw. abnehmender  $cl$  konvergieren die Lösungen der FSFEM gegen die 3D Referenzlösung.

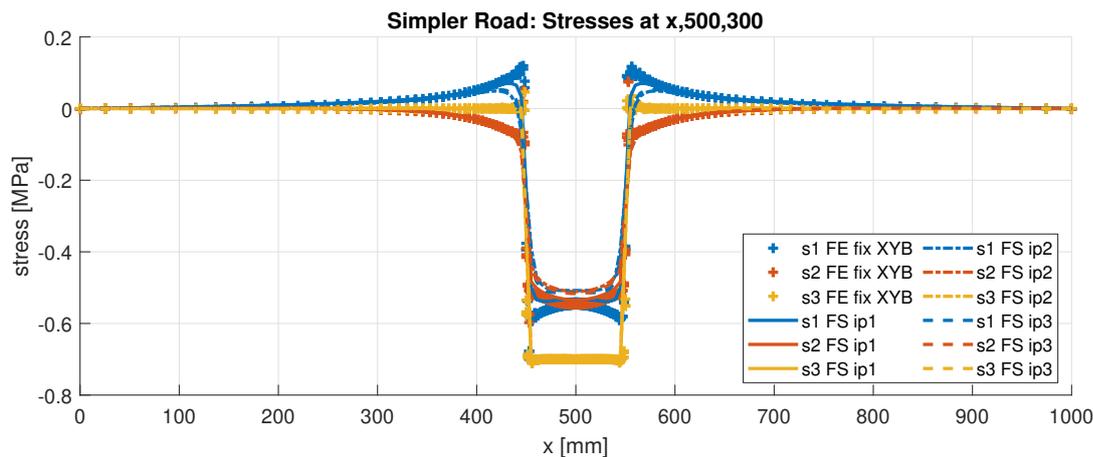
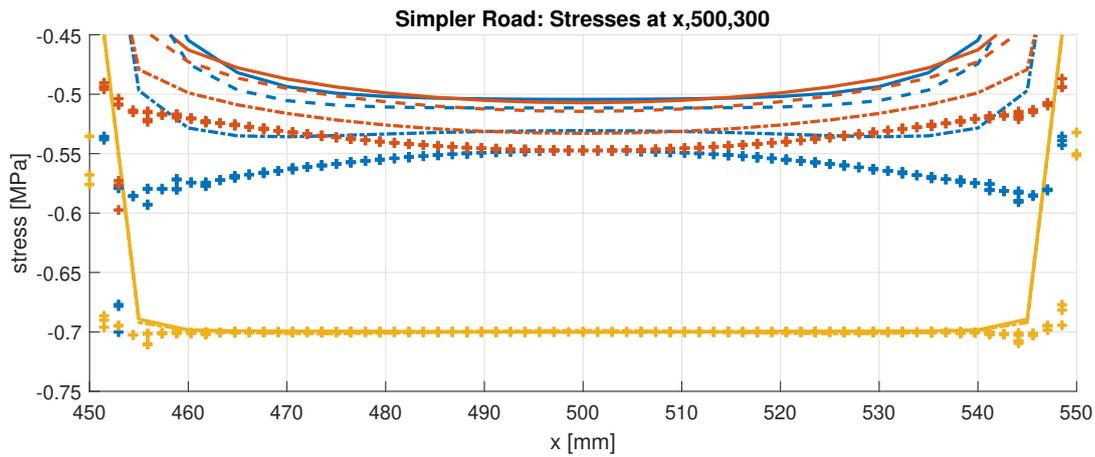


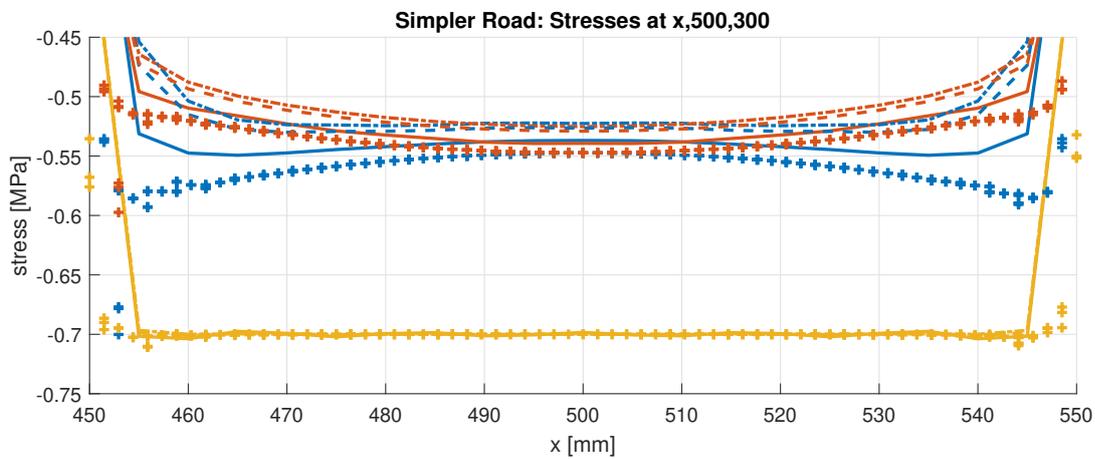
Bild 2.14: Vergleich der Spannungen zwischen 3D FEM und FSFEM. Für beide Netze gilt  $cl = 3$ , d.h. dass das 3D Netz wieder dem zuvor verwendeten entspricht.

Bei der FSFEM kann im Allgemeinen nicht von einer reinen Netzkonvergenzstudie gesprochen werden, es müssen immer die Dichte des des zweidimensionalen Netzes und die Anzahl der Fourierterme gleichzeitig betrachtet werden. In Analogie zur Netzdichte erfordern starke Gradienten eine höhere Anzahl an Fouriertermen. Die in Bild 2.15 gezeigten Graphen wurden mit recht hohen Anzahlen an Fouriertermen von  $420 \leq n_{FT} \leq 461$  erstellt. Bei deutlich kleineren  $n_{FT}$  zeigen sich noch deutliche Oszillationen in den Spannungen.

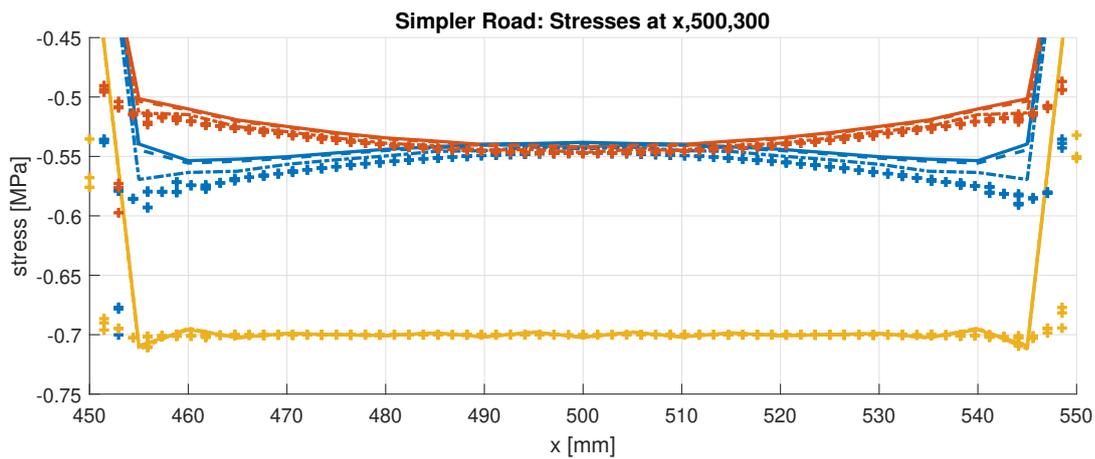
Es lässt sich festhalten, dass der FSFEM-Ansatz hier in der Lage ist die Referenzlösung abzubilden. Allerdings sieht man auch, dass hierzu einerseits ein sehr feines Netz notwendig ist, damit die Spannungen an den Gausspunkten konvergieren. Eine Berechnung der Knotenspannungen wie in Oñate (2009, Kap. 9.8) beschrieben, wäre also sinnvoll. Andererseits ist in diesem Beispiel eine hohe Anzahl an Fouriertermen notwendig um die starken Gradienten der Lösung abzubilden.



(a)  $cl = 3, n_{el} = 1516$ .



(b)  $cl = 1.7, n_{el} = 3232$ .



(c)  $cl = 0.5, n_{el} = 14448$ .

Bild 2.15: Konvergenzstudie FSFEM für das einschichtige Modell mit  $E = 1000$  MPa. Die Graphen verwenden  $420 \leq n_{FT} \leq 461$ .

**Zweischichtiger Aufbau** Um den Grad an Realismus etwas zu erhöhen wurde ein zweischichtiger Aufbau bei gleichbleibenden Dimensionen des Modellproblems gewählt. Die obere Schicht, im Folgenden Decke genannt, hat dabei eine Dicke von 100 mm und eine Steifigkeit von  $E = 10\,000$  MPa. Demnach hat die untere Schicht, im Folgenden Boden genannt, eine Stärke von 200 mm bei einer Steifigkeit von  $E = 1\,000$  MPa. Mit diesen Parametern wird das Verhalten einer Asphaltstraße bei niedrigen Temperaturen modelliert.

Aus Gründen der Recheneffizienz wurde ein Viertelmodell mit entsprechenden Symmetrierandbedingungen verwendet, siehe Bild 2.16a. Es wurde überprüft, ob die Reduktion auf ein Viertelmodell die Spannungsverläufe gegenüber dem vollen Modell ändert. Hierzu wurde auch für die Decke wie zuvor  $E = 10\,000$  MPa gewählt. Die Spannungsverläufe sind identisch und werden daher nicht gezeigt. Insbesondere ergeben sich in der Lastachse auch für das Modell mit Symmetrierandbedingungen wieder die Werte aus Tabelle 2.3. Zur Bestimmung einer Referenzlösung mittels 3D FEM wurden wieder Tetraeder 2ter Ordnung mit  $cl = 3$  mm verwendet.

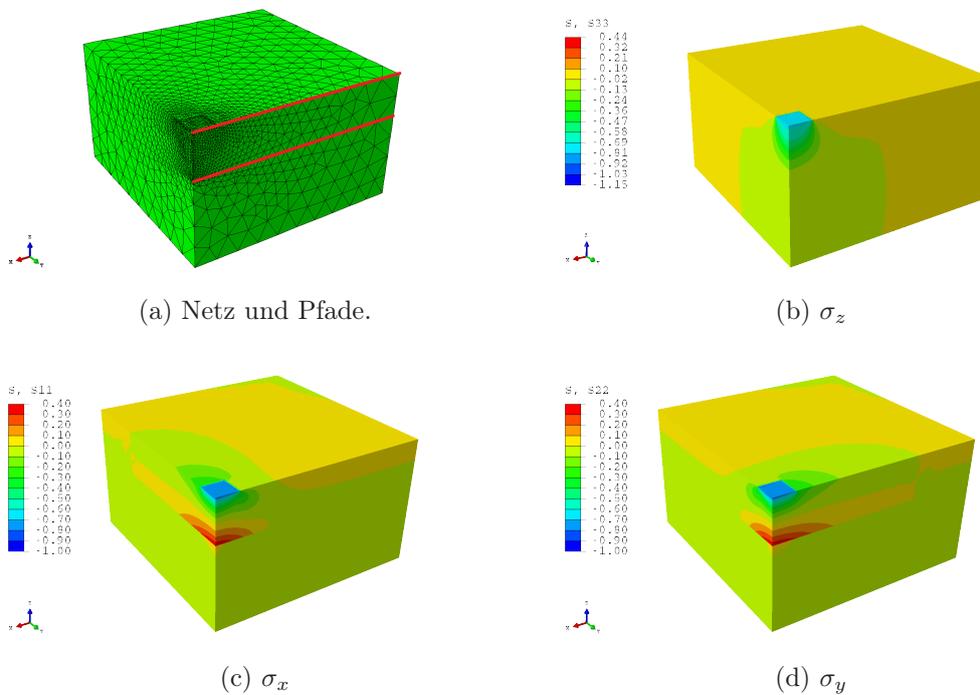


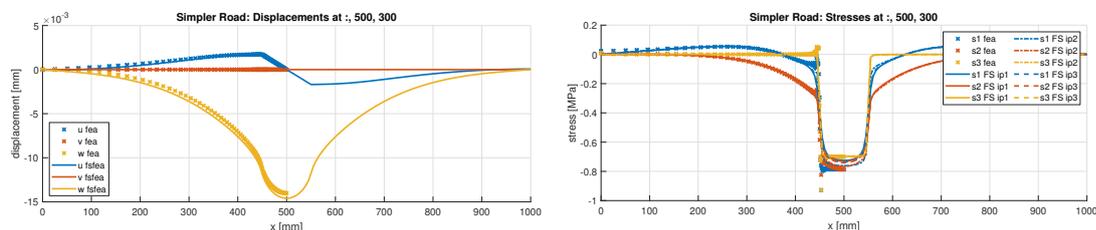
Bild 2.16: Netz, Pfade und Spannungen im zweischichtigen Viertelmodell. Alle Spannungen in MPa

Bei diesem Aufbau ist es natürlich interessant auch die Spannungen auf der Unterseite der Decke zu analysieren, weshalb sich die lokale Verfeinerung über die gesamte Höhe der Decke im Bereich der Lastachse erstreckt, siehe Bild 2.16a. Das Netz besteht daher aus 28329 Elementen, deutlich mehr als  $\frac{1}{4}$  der 66005 Elemente die zuvor ein ausreichend konvergiertes Netz darstellten.

Die Spannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  sind jeweils in Bild 2.16c und Bild 2.16d dargestellt. Es zeigt sich das typische Verhalten einer elastisch gebetteten Platte mit Druckspannungen oben und Zugspannungen unten in der Lastachse. Die Vertikalspannungen  $\sigma_z$  lagern sich mit zunehmender Tiefe schnell um, siehe Bild 2.16b. Im Folgenden werden die Spannungen entlang der beiden in Bild 2.16a gezeigten roten Pfade zwischen 3D FEM und FSFEM verglichen.

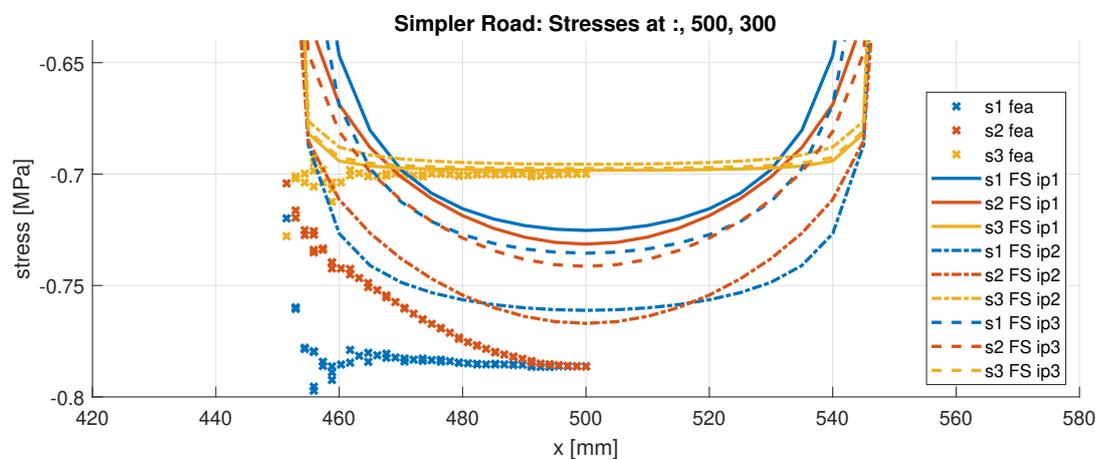
**Vergleich an der Oberseite der Decke** Die folgenden Ergebnisse der FSFEM verwenden  $cl = 3$  mm, das Netz entspricht also dem aus Bild 2.15b.

In Bild 2.17a ist zu sehen, dass die Verschiebungen  $u(x = 0 \text{ mm})$  und  $u(x = 1000 \text{ mm})$  geringer ausfallen als das mit der weicheren Decke (cf. Bild 2.13) der Fall ist. Der Verlauf von  $w$  zeigt allerdings Abweichungen zur 3D-Lösung über die komplette Länge des Pfades.



(a) Verschiebungen.

(b) Übersicht der Spannungsverläufe.



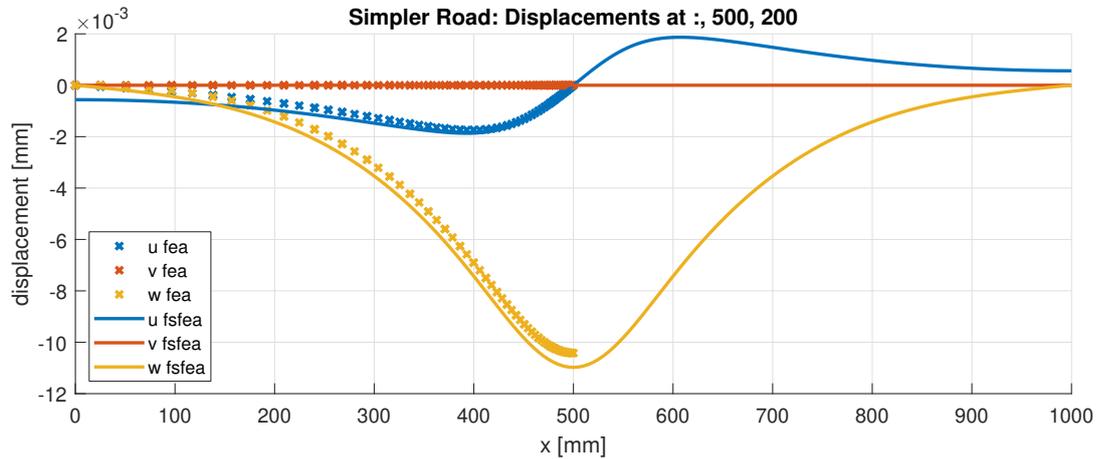
(c) Vergrößerter Ausschnitt der Spannungsverläufe im Bereich der Lastachse.

Bild 2.17: Verschiebungen und Spannungen an der Oberseite der Decke im zweischichtigen Modell.  $E_{Decke} = 10\,000$  MPa,  $E_{Boden} = 1000$  MPa,  $cl = 3$  mm,  $n_{FT} = 200$ .

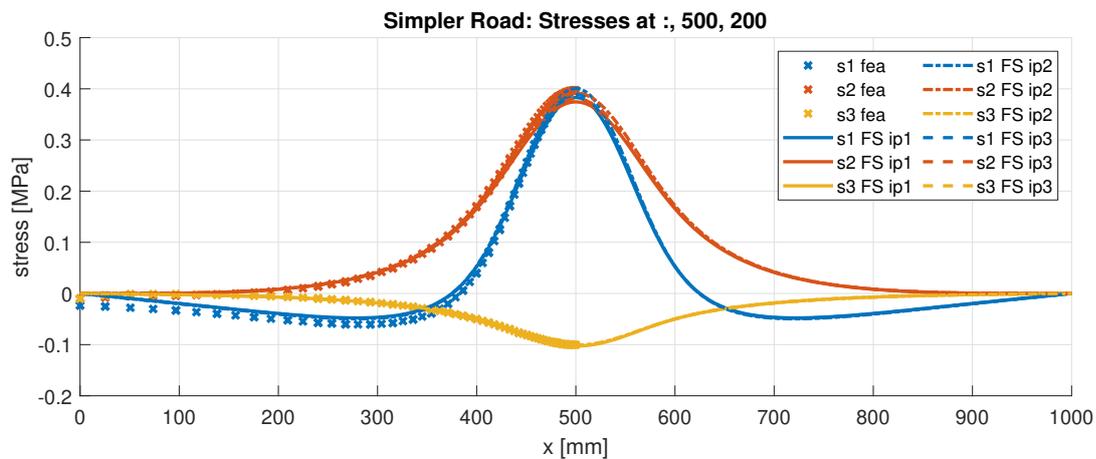
Die in Bild 2.17b gezeigten Spannungen zeigen zunächst ein überzeugendes Verhalten.

Als qualitativer Unterschied zur weicheren Decke (cf. Bild 2.14) zeigt sich, dass  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  jetzt betragsmäßig über  $\sigma_z$  liegen.

**Vergleich an der Unterseite der Decke** Die folgenden Ergebnisse der FSFEM verwenden  $cl = 3 \text{ mm}$ , das Netz entspricht also dem aus Bild 2.15b. Jetzt werden die Verläufe entlang des unteren Pfades aus Bild 2.16a verglichen.



(a) Übersicht über die Verschiebungen.



(b) Übersicht der Spannungsverläufe.

Bild 2.18: Übersicht über Verschiebungen und Spannungen an der Unterseite der Decke bei einer Steifigkeit der Decke von  $E = 10\,000 \text{ MPa}$

Deutlich ist in Bild 2.18a zu sehen, dass die Verschiebungen  $u$  aufgrund des gewählten Ansatzes nicht abklingen. Mutmaßlich erfolgt daraus ein etwas nachgiebigeres Verhalten der Struktur, so dass die Verschiebungen  $w$  höher ausfallen als in der 3D-FEM-Lösung.

Beim Vergleich der Spannungen fällt auf, siehe Bild 2.18b, dass für **FSFEM** im Umkehrschluss die Spannungen an den Rändern der Domäne verschwinden, was in der **3D-FEM-Lösung** bei den gewählten Ausdehnungen noch nicht vollständig der Fall ist.

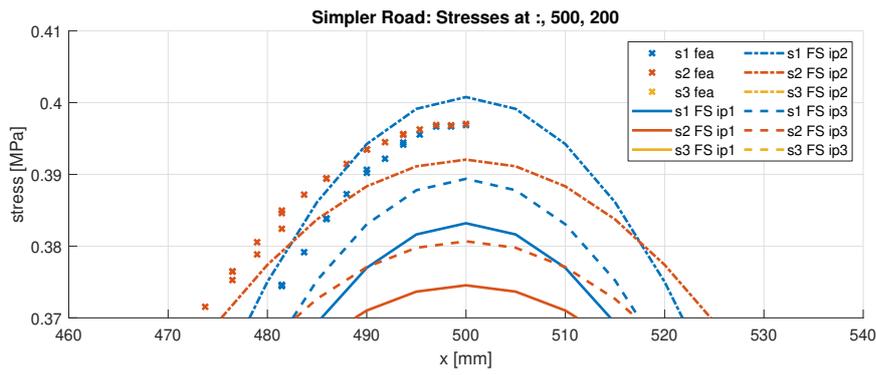
Erst in der Vergrößerung der Spannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  in Bild 2.19 fallen die Abweichungen gegenüber der Referenzlösung ins Auge. Für die **3D-FEM-Lösung** ergibt sich ein konvergiertes Ergebnis von  $\sigma_x \approx \sigma_y \approx 0,3969$  MPa. Da die Verschiebungen  $w$  überschätzt werden, fallen auch die Biegezugspannungen an der Unterseite der Decke höher aus. Weiterhin konvergieren  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  zu unterschiedlichen Werten, was ebenfalls auf den Ansatz Gleichung 2.20 zurückzuführen ist. Für die **FSFEM** ergeben sich mit den Werten aus Tabelle 2.4 relative Fehler von 3,48 % für  $\sigma_x$ , 1,28 % für  $\sigma_y$  und 0,5 % für  $\sigma_z$ . Ob diese Genauigkeit hinreichend ist, wird der Vergleich des Gesamtsystems in Abschnitt 8 zeigen.

Tabelle 2.4: Asymptotische Werte Spannungen in der Lastachse für 3D FE und **FSFEM**.

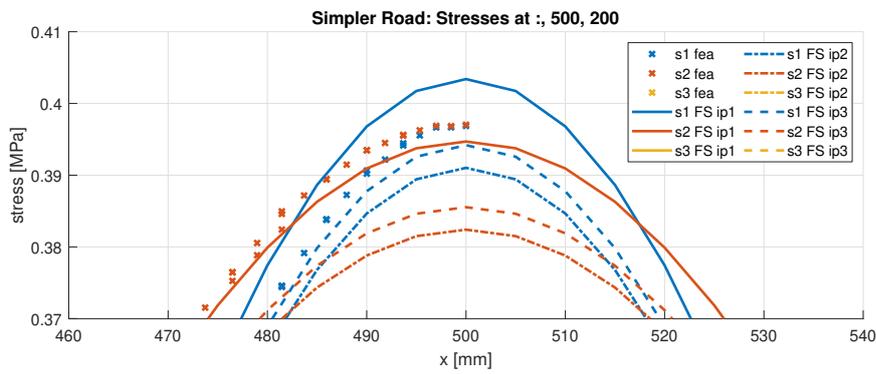
Methode	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$
3D FE	0,3969 MPa	0,3969 MPa	−0,1005 MPa
<b>FSFEM</b> (Gleichung 2.20)	0,4107 MPa	0,4020 MPa	−0,1 MPa

Besonders auffallend ist, dass eine gröbere Vernetzung der Oberseite eine starke Abnahme der benötigten  $n_{FT}$  zur Folge hat. Die in Bild 2.19 dargestellten Verläufe wurden mit 20 bis 40 Fouriergliedern erzeugt. Eine Erhöhung von  $n_{FT}$  hatte keine Änderung der Lösung mehr zur Folge.

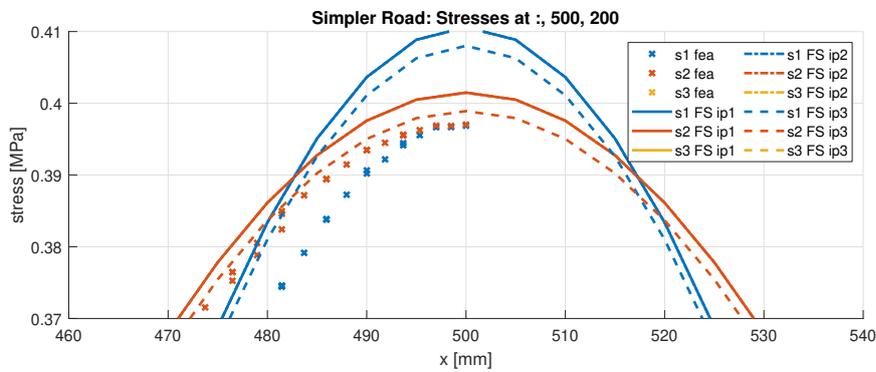
Generell lässt sich feststellen, dass die **FSFEM** für relativ glatte Verläufe der Lösungen gut geeignet ist. Je weniger glatt die Lösung ausfällt, desto mehr Fourierglieder werden zur Approximation benötigt. Damit dieser Effekt zum Tragen kommen kann muss die Lasteinleitungsfläche recht grob vernetzt werden, da ansonsten die Verschiebungen wieder sehr hohe Gradienten aufweisen, die viele Fourierglieder notwendig machen. Eine Lasteinleitung wie durch die „Haversine“-Formel von Huang (2004, S. 88) ist mutmaßlich deutlich besser für die Verwendung mit **FSFEM** geeignet.



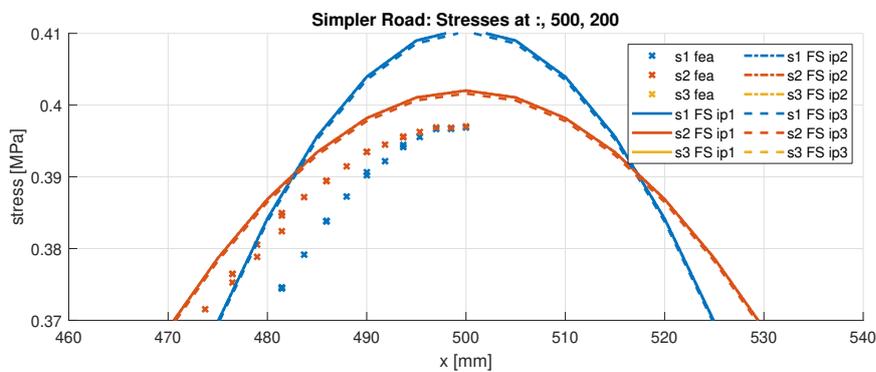
(a)  $cl = 3$ .



(b)  $cl = 1.7$ .



(c)  $cl = 0.5$ .



(d)  $cl = 0.1$ .

Bild 2.19: Konvergenzstudie bezüglich  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  mittels FSFEM für die Unterseite der Decke. Die Graphen verwenden  $20 \leq n_{FT} \leq 40$ .

## 2.1.10 Laufzeitvergleich von flexCALC zu SAFEM und ABAQUS

Im Folgenden wird nur die Single-Thread Performance verglichen.

### SAFEM

Beide neu implementierte Varianten der FSFEM sind im Single-Thread Betrieb schneller als SAFEM. In einem Testproblem mit 2848 Dreiecken zweiter Ordnung und 100 Fouriergliedern (876150 Unbekannte) benötigt SAFEM zur Lösung von  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$  im Mittel aus fünf Messungen 48,83 s. FSFEMa hingegen benötigt 23,51 s, der Speedup beträgt hier ca. 2,08. FSFEMb wiederum benötigt 17,90 s, der Speedup beträgt ca. 2,73. Diese Rechnungen wurden auf einem Intel i5-7300U Mobilprozessor<sup>4</sup> mit 16 GB RAM durchgeführt.

Mittels des Matlab-Profilers wurde untersucht für welche Rechenschritte eines exemplarischen Durchlaufs der Varianten des Codes wieviel Zeit verwendet wird. In Tabelle 2.5 sind die vier aufwändigsten Berechnungsschritte von FSFEMa aufgeführt. Es ist zu sehen, dass nur die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen trivial parallelisiert werden kann. Da dieser Berechnungsschritt allerdings der günstigste unter den angegebenen ist, ist der Performancezuwachs durch Parallelisierung auch gering, siehe auch Abschnitt 2.1.11. Versuche die einmaligen Aufrufe durch `spmd`<sup>5</sup> zu parallelisieren sind fehlgeschlagen. Vermutlich macht der erhöhte Kommunikationsaufwand den potentiellen Performancegewinn zunichte.

Zeit [s]	Aufrufe	Rechenschritt
3,37	1	Index Assemblierung für Konstruktion von $\mathbf{K}_g$
3,26	2848	Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen
5,07	1	Konstruktion von $\mathbf{K}_g$
8,18	1	Berechnung der Verschiebungen
$\Sigma = 19,88$		

Tabelle 2.5: Untersuchung der Laufzeiten der Berechnungsschritte für FSFEMa.

In Tabelle 2.6 sind die zu FSFEMa korrespondierenden Berechnungsschritte von FSFEMb aufgeführt. Es ist zu sehen, dass nur die Berechnung der Indizes für die Konstruktion von  $\mathbf{K}_{fg}$  *nicht* trivial parallelisiert werden kann, diese nun jedoch auch verschwindend kleine Laufzeit hat. Insgesamt benötigt die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen in FSFEMb etwas länger als in FSFEMa. Dieser geringfügige Nachteil wird allerdings durch die triviale Parallelisierbarkeit des Aufstellen des Gleichungssystems und des LöSENS nach den Verschiebungen wettgemacht. Im Single-Thread Betrieb ist es die

<sup>4</sup><https://ark.intel.com/de/products/97472/Intel-Core-i5-7300U-Processor-3M-Cache-up-to-3-50-GHz>

<sup>5</sup><https://de.mathworks.com/help/distcomp/spmd.html>

deutlich schnellere Assemblierung der Indexlisten für die Konstruktion der (globalen) Steifigkeitsmatrix, die **FSFEMb** einen Performancevorteil verschafft.

Zeit [s]	Aufrufe	Rechenschritt
0,07	1	Index Assemblierung für Konstruktion von $\mathbf{K}_{fg}$
0,5	2848	Berechnung der Bauteile der Elementsteifigkeitsmatrizen
1,59	$50 \times 3 \times 2848$	Berechnung der B-Operatoren
1,67	$50 \times 3 \times 2848$	Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen
<hr/>		
ZS = 3,83		
<hr/>		
4,46	50	Konstruktion von $\mathbf{K}_{fg}$
8,29	50	Berechnung der Verschiebungen
<hr/>		
$\Sigma = 16,58$		
<hr/>		

Tabelle 2.6: Untersuchung der Laufzeiten der Berechnungsschritte für **FSFEMb**.

## Abaqus

Der Laufzeitvergleich zu ABAQUS konnte nicht auf identischen Systemen durchgeführt werden. Die Rechnung mit dem teilanalytischen Verfahren FSFEMb nach Bild 2.4b wurde mit dem System aus dem vorigen Paragraphen durchgeführt. Die Rechnung mittels ABAQUS 6.141 ist auf einem Intel i7-870<sup>6</sup> mit ebenfalls 16 GB RAM durchgeführt worden.

In Bild 2.20 sind die 2 verschiedenen Netze abgebildet. Bild 2.20a zeigt ein Netz mit 103054 Tetraedern. Dieses verfügt auf der gezeigten Stirnfläche (x-y-Ebene) über ca. 1640 Elemente. Deshalb wurde in GMSH ein ähnliches Netz mit 1651 Dreiecken erstellt. In beiden Fällen wurden quadratische Ansatzfunktionen verwendet. FSFEMb benötigte hier im Mittel aus drei Messungen 11,20s. Die komplette 3D FEM Lösung mittels ABAQUS hingegen benötigte 272,67s. Der Speedup beträgt somit über 24. Auch auf identischen Testsystemem sollte dieses Verhältnis ähnlich ausfallen.

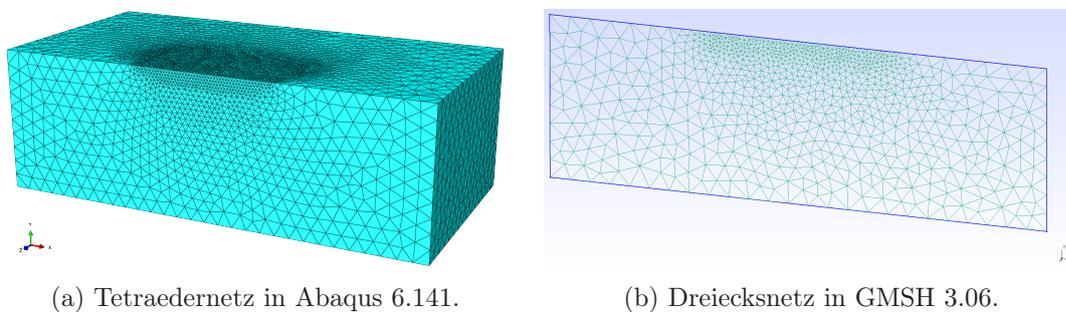


Bild 2.20: 3D Tetraedernetz in Abaqus und Dreiecksnetz in GMSH.

### 2.1.11 Untersuchungen zum Einsatz der Parallelisierungen

Grundsätzlich ist es gängige Praxis Parallelisierung für klassische FE Berechnungen einzusetzen. Im allgemeinen besteht jeder Code aus Teilen die parallelisiert werden können, und Teilen, die bei denen das nicht möglich ist. Das Gesetz von Amdahl (1967) besagt hierzu, dass ein solches Problem nur um den reziproken Faktor des Anteils, welcher nicht parallelisierbar ist, beschleunigt werden kann. Ist also ein Problem zu einem Zehntel nicht parallelisierbar, kann die Abarbeitungsgeschwindigkeit maximal verzehnfacht werden, egal wie groß das Problem ist und wie viele Rechenkerne man einsetzt.

Parallelisierung kann für verschiedene Schritte in der Berechnung verwendet werden, so zum Beispiel für die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen oder das Lösen des globalen Gleichungssystems. In Bild 2.22 und Tabelle 2.7 ist dargestellt wie sich die

<sup>6</sup>[https://ark.intel.com/de/products/41315/Intel-Core-i7-870-Processor-8M-Cache-2\\_93-GHz](https://ark.intel.com/de/products/41315/Intel-Core-i7-870-Processor-8M-Cache-2_93-GHz)

Laufzeiten der verschiedenen Varianten von FSFEM mit steigender Anzahl der verwendeten Threads verringert. Es ist zu sehen, dass SAFEM zwar gut skaliert, jedoch in der Performance hinter den neu implementierten Varianten zurückbleibt. FSFEMa verfügt wie bereits in Abschnitt 2.1.10 besprochen über eine gute Single-Thread Performance, skaliert aber überhaupt nicht. Die beste Performance, sowohl mit einem, als auch mit mehreren Threads zeigt FSFEMb. Neben dem bereits vorgestellten Mobilprozessor wurde FSFEMb auch noch auf einem Desktopprozessor Intel i5-7500<sup>7</sup> mit 16 GB RAM getestet. Das Problem mit 876150 Unbekannten lässt sich auf diesem System bereits mit 4 Threads unterhalb von 5 s lösen.

Algorithmus@System	Laufzeit [s] mit Threads			
	1	2	3	4
SAFEM@Core i5-7300U	48,83	30,14	24,76	24,70
FSFEMa@Core i5-7300U	23,51	26,78	24,27	24,48
FSFEMb@Core i5-7300U	17,90	11,57	10,09	9,37
FSFEMb@Core i5-7500	13,32	7,61	5,79	4,98

Tabelle 2.7: Tabellarische Darstellung der in Bild 2.22 angegebenen Daten.

Des Weiteren beinhalten auch die Berechnungsalgorithmen, welche in den „Richtlinien für die rechnerische Dimensionierung von Verkehrsflächen mit Asphaltdeckschicht“ (RDO Asphalt) und den „Richtlinien zur Beurteilung der strukturellen Substanz von Asphaltstraßen“ (RSO Asphalt) beschrieben sind, die Möglichkeit, über die Berechnung der einzelnen Belastungszustände eine Parallelisierung durchzuführen. Beide Varianten sind zukünftig im angestrebten Berechnungsprogramm möglich, ihr Einsatz ist aber jeweils nur aufgabenbezogen sinnvoll.

Da die Berechnungen der Beanspruchungszustände voneinander vollkommen unabhängig sind, können diese ebenfalls parallel ausgeführt werden. Da hier eine hundertprozentige Parallelisierbarkeit vorliegt, wird die Beschleunigung theoretisch nur von der Problemgröße und der Anzahl der Rechenkerne beeinflusst. Stehen zum Beispiel acht Rechenkerne zur Verfügung, dauert die Berechnung von einem oder acht Beanspruchungszuständen theoretisch gleich lang. Erst bei neun Beanspruchungszuständen kommt es zu einem Anstieg der absoluten Berechnungszeit, welche dann wiederum bis zu 16 Beanspruchungszuständen konstant wäre. In einem realen Computersystem kommt es aber auch innerhalb dieser Stufen zu einem Anstieg der Berechnungszeit, siehe Bild 2.21. Idealerweise entspricht die Problemgröße einem ganzzahligen Vielfachen der Anzahl der Rechenkerne. Der relative, zeitliche Einfluss einer weiteren Stufe reduziert sich aber, je größer die Anzahl der Problemstellungen wird.

Somit bietet sich die Parallelisierung mit Hilfe der Fourier-Ansatzfunktionen insbesondere bei Einzelberechnungen an, wie zum Beispiel bei der Strukturanalyse, der

<sup>7</sup>[https://ark.intel.com/products/97123/Intel-Core-i5-7500-Processor-6M-Cache-up-to-3\\_80-GHz](https://ark.intel.com/products/97123/Intel-Core-i5-7500-Processor-6M-Cache-up-to-3_80-GHz)

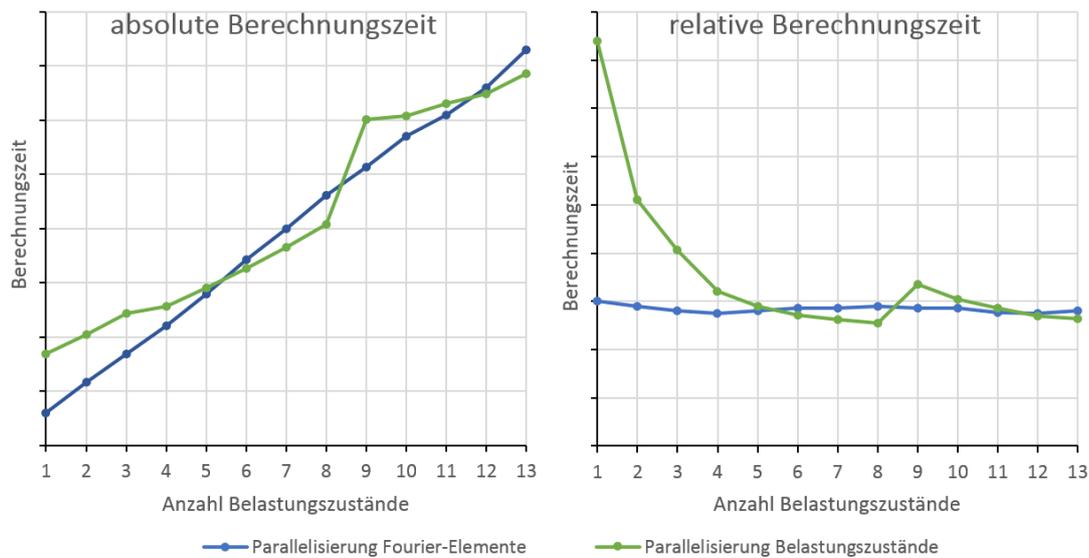


Bild 2.21: Absolute und relative Berechnungszeit in Abhängigkeit der Anzahl der Belastungszustände bei acht Rechenkernen. Quelle: Oeser, Wang, Liu, Wellner u. a. 2015, Bild 103

Bewertung der Ebenheit und der Rissausbreitung, wohingegen die Parallelisierung hinsichtlich der Beanspruchungszustände bei den numerischen und probabilistischen Dimensionierungen verwendet wird.

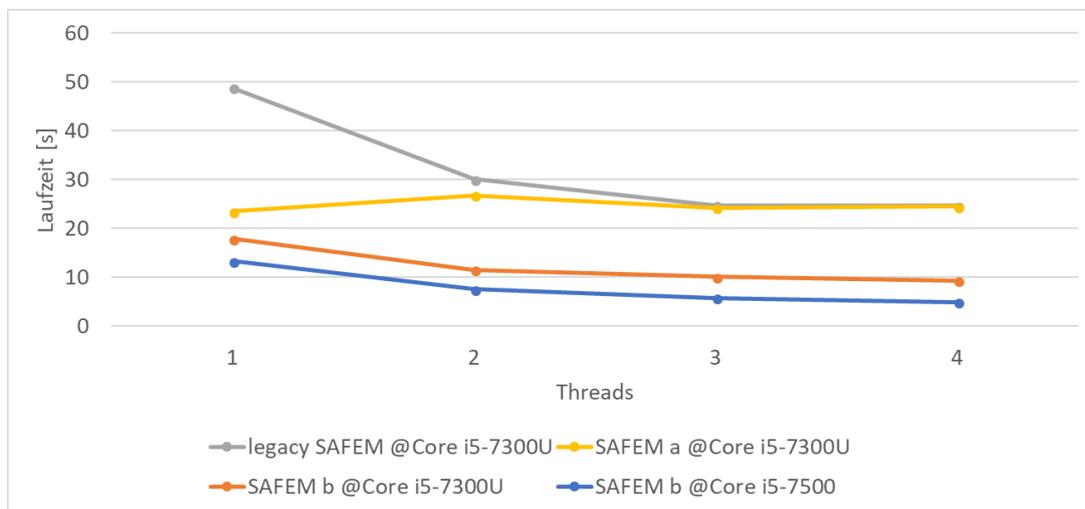


Bild 2.22: Reduzierung der Laufzeiten von verschiedenen FSFEM Varianten für das Testproblem mit 876150 Unbekannten in Abhängigkeit der Anzahl der verwendeten Threads.

## 2.2 AP 220: Bewegte und dynamische Radlasten

Die Berücksichtigung instationärer und mutmaßlich zufälliger Radlasten erfordert, dass die Belastung mit einer definierten Geschwindigkeit über die Netzoberfläche bewegt wird. Diese Radlasten werden über Last-Zeit-Funktionen in die Berechnung einbezogen.

Nur für praktisch nicht relevante Idealisierungen sind analytische Lösungen der dynamischen Interaktion bewegter Lasten mit der Fahrbahn möglich. Solche vereinfachten Modelle werden beispielsweise in Frýba (1987) und Olsson (1991) diskutiert und dienen der Verifikation der FEM-Modelle, bevor diese zur Approximation komplizierterer und damit analytisch nicht mehr zugänglicher Probleme verwendet wird. Für einen Überblick über die existierenden Modelle sei auf die Artikel von Beskou und Theodorakopoulos (2011) und Ouyang (2011) verwiesen.

Das Arbeitspaket gliedert sich in drei Teile. Diese sind

1. die Erweiterung der bislang quasi-statischen FEM um Dynamik,
2. die Lösung der Bewegungsgleichungen mittels des Newmark- $\beta$ -Verfahrens,
3. und die Berücksichtigung der instationären Lasten in Zeit und Raum.

### 2.2.1 FEM und Dynamik

Die Bewegungsgleichungen für ein in Bewegung befindliches lineares FE-System lauten

$$\mathbf{M}(t)\mathbf{a} + \mathbf{C}(t)\mathbf{v} + \mathbf{K}(t)\mathbf{u} = \mathbf{F}(t) \quad , \quad (2.46)$$

wobei  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix,  $\mathbf{C}$  die Dämpfungsmatrix, und wie üblich  $\mathbf{K}$  die Steifigkeitsmatrix bezeichnen. Alle Matrizen können, müssen aber nicht von der Zeit  $t$  abhängen. Diese wird im Folgenden aufgrund kompakterer Notation häufig ausgelassen. Die Massenmatrix berechnet sich folgendermaßen

$$\int_V \rho \mathbf{N}^\top \mathbf{N} dV \quad , \quad (2.47)$$

wobei  $\rho$  die Dichte des Materials darstellt. Des weiteren ist  $\mathbf{F}(t)$  der Vektor der äußeren (instationären) Lasten, sowie  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{u}$  sind der Beschleunigungs-, der Geschwindigkeits-, sowie der Verschiebungsvektor. In kinetischen Berechnungen wird prinzipiell das statische Gleichgewicht zur Zeit  $t$  gesucht, dass die Effekte der beschleunigungsabhängigen Trägheitskräfte und der geschwindigkeitsabhängigen Dämpfungskräfte berücksichtigt. Unter Vernachlässigung dieser Anteile erhält man wieder das statische System nach Gleichung 2.17.

Prinzipiell ist Gleichung 2.46 ein System gewöhnlicher, zunächst linearer, Differentialgleichungen 2ter Ordnung und lässt sich mit Standardverfahren lösen. Allerdings können die Standardverfahren im Falle einer hohen Ordnung der involvierten Matrizen sehr teuer werden. In der Praxis der FE-Berechnung verwendet man daher meist nur wenige effiziente Verfahren. Für weitere Details sei auf die Bücher von Bathe (2002) und Bower (2009) verwiesen.

Dabei wird angenommen, dass Rayleigh-Dämpfung vorliegt, das heißt, dass die Dämpfungsmatrix als

$$\mathbf{C} = \alpha_d \mathbf{M} + \beta_d \mathbf{K} \quad , \quad (2.48)$$

definiert wird, wobei die Koeffizienten  $\alpha_d$  und  $\beta_d$  durch zwei Eigenfrequenzen des Straßenbelags  $\omega_i$  and  $\omega_j$ , sowie der zugehörigen modalen Dämpfungsverhältnisse  $\xi_i$  and  $\xi_j$ . Unter der Annahme, dass  $\xi_i = \xi_j = \xi$ , nehmen die Koeffizienten die folgende Form an:

$$\alpha_d = \frac{2\omega_i\omega_j\xi}{\omega_i+\omega_j} \quad (2.49)$$

$$\beta_d = \frac{2\xi}{\omega_i+\omega_j}. \quad (2.50)$$

Nachteilig ist bei dieser Art die Dämpfung zu berücksichtigen, dass die viskoelastische Modellierung über das generalisierte Maxwell-Modell, wie in AP 230 vorgenommen, nicht direkt aufgenommen wird. Grundsätzlich kann dies erfolgen, wie beispielsweise Golla und Hughes (1985), demonstrieren. Allerdings verwenden die meisten Forscher polynomiale Ansatzfunktionen. Daher ist es derzeit völlig unklar, welche Auswirkungen diese Modellierung auf die Performance von FSFEM hat. Nach unserer derzeitigen Einschätzung entkoppelt das GLS nach wie vor, da der viskoelastische Tangentenmodul (Gleichung 2.67) nur von den Materialparametern und dem Zeitschritt abhängt. Eine konkrete Implementierung existiert unseres Wissens nach derzeit nicht. Beispielsweise verwenden auch Liu, Xing, Wang u. a. (2017, Gleichung 2.20) zur Aufstellung von  $\mathbf{C}$  nur einen nicht weiter spezifizierten Dämpfungsfaktor.

## 2.2.2 Lösung der Bewegungsgleichungen

Im Gegensatz zu direkten expliziten Verfahren, wie beispielsweise der Methode der zentralen Differenzen (vgl. Bathe 2002, Kap. 9.2.1), sind implizite Verfahren, wie das Newmark-Verfahren nicht auf die Einhaltung eines kritischen Zeitschritts  $\Delta t$  angewiesen um stabil zu bleiben. Weitere verwandte Verfahren sind das Houbolt-, oder das Wilson- $\Theta$ -Verfahren.

Das Newmarksche Zeitintegrationsschema geht davon aus, dass der Geschwindigkeits-, und der Verschiebungsvektor zu einem bislang unbekanntem Zeitschritt  $t + \Delta t$  folgendermaßen berechnet werden können

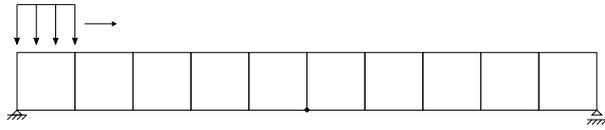
$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - \beta)\ddot{\mathbf{u}}(t) + \beta\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)] , \quad (2.51)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{u}}(t) + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}(t) + \gamma\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)] . \quad (2.52)$$

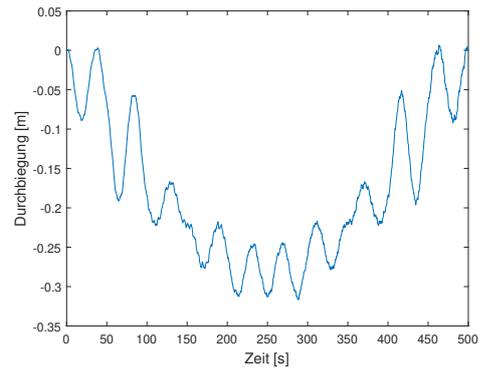
Hierbei sind  $\beta$  und  $\gamma$  zwei zu wählende Parameter. Häufig werden beide Parameter zu 0,5 gewählt.

### 2.2.3 Instationäre und schwankende Radlasten

Radlasten, die sich über die Fahrbahnoberfläche bewegen können relativ einfach durch eine zeitvariante Abbildung auf die Knoten an der Oberfläche erfolgen. Grundsätzlich geschieht. Zunächst wurde eine einfache Topflast in 2D gewählt, die sich über eine idealisierte, statisch bestimmte „Brücke“ bewegt, siehe Bild 2.23a. Die Topflast übt einen konstanten Druck auf die Struktur aus, dabei bewegt sie sich innerhalb von 500 s nach rechts. Die Verschiebung des durch einen Punkt hervorgehobenen mittleren unteren Knotens der Brücke wird verfolgt. Die zugehörigen Vertikalverschiebungen sind in Bild 2.23b dargestellt. Es kann also geschlossen werden, dass die Implementierung grundsätzlich funktioniert. Es erfordert allerdings noch weitergehende Studien hinsichtlich der Verifikation. Die Daten der dynamischen Radlasten aus der Untersuchung von Wegener u. a. (2016) wurden vom Institut für Kraftfahrzeuge der RWTH Aachen freundlicherweise zur Verfügung gestellt. Damit stehen dynamische Lasten, die mittels einer Kraftmessfelge gemessen wurden zur Verfügung. Zur Verifikation wären allerdings weitere Daten wie Längsprofile der Fahrbahndecke, Daten zur Fahrdynamik, Aufbau und Materialparameter der Straße sowie die Abbildung des Systems Reifen-Fahrwerk notwendig. Derlei Analysen gehen weit über das in diesem Projekt leistbare hinaus. Weiterhin kann ABAQUS nicht zur Verifikation herangezogen werden, da nach bestem Wissen der Autoren bewegte Lasten als Randbedingungen dort nicht möglich sind. Es müsste eine USER-Subroutine für ABAQUS geschrieben werden. Diese selbst müsste natürlich erstmal verifiziert werden.



(a) Versuchsaufbau mit zehn linearen quadrilateralen Elementen.



(b) Ergebnisse der Durchbiegung des mittleren unteren Knotens über die Zeit.

Bild 2.23: Darstellung des Versuchsaufbaus zu Modellierung von bewegten Lasten mittels FEM. Die links in a) dargestellte konstante Topflast bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts. In b) ist die Horizontalverschiebung, oder Durchbiegung, des mittleren unteren Knotens der Brücke über der Zeit dargestellt. Die Schwankungen resultieren hier aus dem Wechsel zwischen verschiedenen Elementen. Für eine realistische Vorhersage ist die Diskretisierung zu grob.

## 2.3 AP 230: Rheologische Eigenschaften und komplexe Formulierung

Im Asphaltstraßenbau haben rein elastische Materialmodelle nur begrenzte Gültigkeit. In der Realität kann für nahezu jedes Material ein dissipatives Verhalten festgestellt werden: Bewegungsenergie wird in Wärme umgewandelt und nicht elastisch gespeichert. Viele solch dissipativer Materialien können durch zeit- und frequenzabhängige viskoelastische Konstitutivmodelle beschrieben werden. Ein solches Modell, das auch schon vielfach zur Modellierung von bituminösen Materialien eingesetzt wurde ist das generalisierte Maxwell-Modell (GMM). Teile dieses Kapitels basieren auf der Arbeit von Czarnecki (2017).

### 2.3.1 Theorie

Gedanklich besteht das GMM aus einer Parallelschaltung von (theoretisch) beliebig vielen sogenannten Maxwell-Elementen. Eine Hookesche Feder kann zur Modellierung eines Gleichgewichtsmoduls ebenfalls parallel geschaltet werden. Ein einzelnes Maxwell-Element besteht dabei aus der Reihenschaltung eines Newtonschen Dämpfers und einer Hookeschen Feder, siehe Bild 2.24.

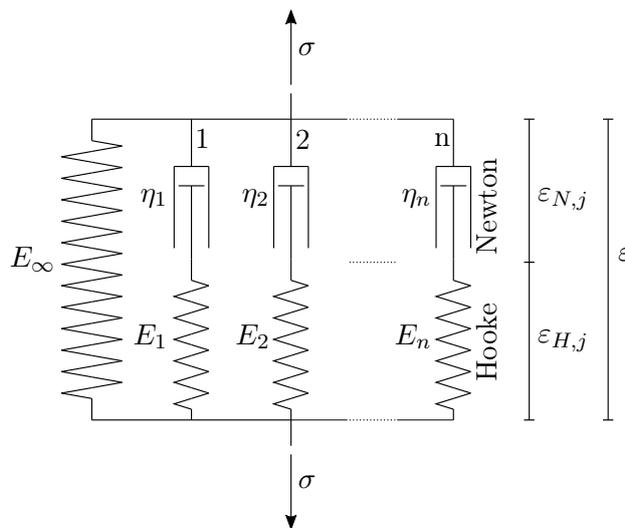


Bild 2.24: Generalisiertes Maxwell-Modell: Parallelschaltung beliebig vieler Maxwell-elemente mit einer optionalen Gleichgewichtsfeder. Quelle: Czarnecki (2017).

Linear elastisches Verhalten kann in guter Näherung durch das Hookesche Gesetz beschrieben werden

$$\sigma = E \cdot \epsilon . \quad (2.53)$$

Das Modell ist zeitinvariant. Für zeitabhängiges Materialverhalten im Rahmen kleiner Deformationen wird häufig das Newtonsche Element verwendet, dargestellt als Dämpfer mit der dynamischen Viskosität (bzw. Scherviskosität)  $\eta$ . Es gilt folgender Zusammenhang zwischen Spannung und Scherrate  $\dot{\epsilon}$ :

$$\sigma = \eta \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \eta \cdot \dot{\epsilon} . \quad (2.54)$$

Die Viskosität des Dämpfers ist konstant und simuliert somit ein ideales Newtonsches Fluid. Kombiniert man beide Modelle zu einer Reihen- oder Parallelschaltung, können die Effekte der idealen Elastizität des Hookeschen Elements und der idealen Viskosität des Newton-Elements zu einem neuen viskoelastischen Materialgesetz kombiniert werden. Aus der Kontinuität folgt, dass beide Elemente zu jedem Zeitpunkt derselben mechanischen Spannung ausgesetzt sind. Die Gesamtdehnung resultiert aus der Superposition der Einzeldehnungen. Damit kann die folgende gewöhnliche lineare Differentialgleichung hergeleitet werden:

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma . \quad (2.55)$$

Für manche Dehnungsfunktionen,  $\epsilon(t)$ , kann die Differentialgleichung (Gleichung 2.55) nach der Spannung aufgelöst werden. Für einen Dehnungssprung  $\epsilon(t) = \epsilon_0 = \text{const}$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  liefert das Materialgesetz folgende symbolische Lösung für die **relaxierende** Spannung:

$$\sigma(t) = E\bar{\epsilon} \cdot e^{-\frac{E}{\eta}t} . \quad (2.56)$$

Charakteristisch für das GMM ist die Parallelschaltung einer beliebigen Anzahl,  $n$ , vieler Maxwellelemente, optional zusammen mit einer isolierten Gleichgewichtsfeder der Steifigkeit  $E_0$  (siehe Bild 2.24), wobei die Materialparameter der einzelnen Maxwellarme über die Relaxationszeit  $\tau_j = \frac{\eta_j}{E_j}$ :  $0 < j \leq n$  beschrieben werden. Das Stoffgesetz eines solchen Körpers lässt sich durch die Differentialgleichung der Ordnung  $n$

$$\sum_{j=1}^N p_j \cdot \frac{\partial^j \sigma(t)}{\partial t^j} = \sum_{j=1}^N q_j \cdot \frac{\partial^j \epsilon(t)}{\partial t^j} \quad (2.57)$$

allgemein mit den Unbekannten  $p_j$  und  $q_j$  ausdrücken. Für parallelgeschaltete Modelle hingegen sind die Dehnungen der Elemente stets identisch und deren Spannungen können zur Gesamtspannung des Körpers superponiert werden. So liefert die Sprungfunktion mit konstanter Dehnung  $\bar{\epsilon}$  die Gleichung

$$\sigma(t) = \bar{\epsilon} \cdot \underbrace{\left[ E_0 + \sum_{j=1}^N E_j \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right) \right]}_{\text{Relaxationsfunktion } := \Gamma(t)} \quad (2.58)$$

Die Relaxationsfunktion  $\Gamma(t)$  ist unabhängig von den aufgebrauchten Dehnungen. Für eine Spannungsberechnung mit beliebigen zeitvarianten Dehnungsfunktionen  $\epsilon(t)$  und einer treppenförmigen Annäherung des kontinuierlichen Verlaufs, wird die Dehnung  $\Delta\epsilon_i$  gerade dann aufgebracht, wenn der Zeitpunkt  $t_i$  überschritten wird (siehe Bild 2.25).

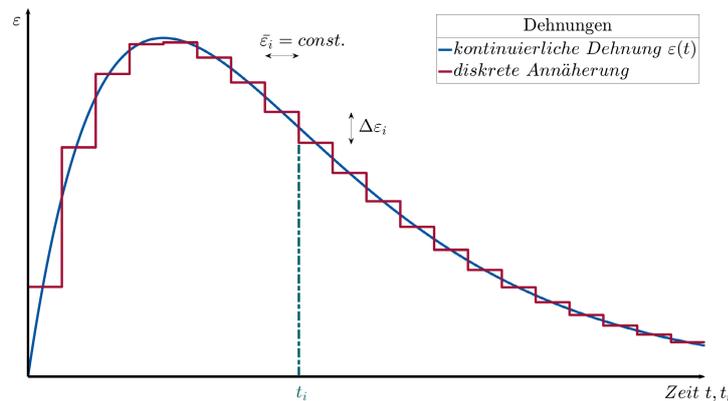


Bild 2.25: Diskrete Annäherung der kontinuierlichen Dehnungsfunktion. Der Dehnungssprung  $\Delta\epsilon_i$  tritt auf, wenn der Zeitpunkt  $t \geq t_i$  erreicht wird. Quelle: Czarnecki (2017).

Für eine analytische Darstellung des abrupten Dehnungssprungs wird die Heaviside-Funktion  $\Theta(\bullet)$  verwendet

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0: & x < 0 \\ 1: & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

Somit wird der inkrementelle Dehnungszuwachs über die Anzahl  $M$  der Schritte bis zum Zeitpunkt  $t$  beschrieben über

$$\epsilon(t) \approx \sum_{i=1}^M \Delta\epsilon_i \cdot \Theta(t - t_i) \quad (2.60)$$

Die Dehnung bleibt für das Intervall  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  konstant, sodass die Spannungen für die einzelnen Intervalle über die bereits beschriebene Gleichung (Gleichung 2.58) mit

$$\sigma(t) \approx \sum_{i=1}^M \Delta\epsilon_i \cdot \Gamma(t - t_i) \cdot \Theta(t - t_i) \quad (2.61)$$

ausgedrückt werden kann. Dabei werden die Dehnungssprünge vom Zeitpunkt ( $t = 0$ ) bis zum aktuellen Zeitpunkt  $t$  aufsummiert. Durch die Berechnung mittels infinitesimalen Zeit- und Dehnungssprüngen kommt es zum Grenzübergang zum stetigen Verlauf ( $\sum \rightarrow \int$ ,  $\Delta\epsilon_i \rightarrow d\epsilon$ ,  $\Theta(t - t_i) \equiv 1$ ) und die Spannung lässt sich für kontinuierliche Dehnungen mit dem Faltungsintegral

$$\sigma(t) = \int_{s=0}^{s=t} \Gamma(t - s) \cdot d\epsilon \quad \text{mit} \quad d\epsilon = \frac{\partial\epsilon(s)}{\partial s} \cdot ds \quad (2.62)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(t) = \int_0^t \frac{\partial\epsilon(s)}{\partial s} \cdot \Gamma(t - s) \cdot ds = \underbrace{(\dot{\epsilon} * \Gamma)(t)}_{\text{Konvolution zwischen 0 und } \infty} \quad \text{für } t \in [0, \infty) \quad (2.63)$$

ausdrücken. Vernachlässigt wurde für diese Herleitung allerdings noch die sprunghafte Dehnung  $\bar{\epsilon}_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Ergänzend wird also der Spannungsanteil aus einer Startdehnung zu dem Faltungsintegral addiert. Hierfür kann ebenfalls die Gleichung (Gleichung 2.58) verwendet werden. Abschließend erhalten wir die Gleichung für die Spannung des Generalisierte Maxwellmodell in integraler Form zu

$$\sigma(t) = \epsilon(t = 0) \cdot \Gamma(t) + \int_0^t \frac{\partial\epsilon(s)}{\partial s} \cdot \Gamma(t - s) \cdot ds \quad (2.64)$$

### 2.3.2 Approximative Spannungsberechnung

Die Schwierigkeit besteht nun darin das Faltungsintegral in Gleichung 2.64 zu lösen, was in der Regel analytisch nicht möglich ist. Daher wird eine numerische Lösung benötigt, die ein genähertes, jedoch hinreichend genaues Ergebnis liefert. Kaliske und Rothert (1997) haben hierzu eine Referenzlösung geliefert die eine elegante und effiziente Umsetzung in FE-Codes ermöglicht. Die einzelnen Schritte der Herleitung werden an dieser Stelle nicht wiedergegeben.

Die Berechnung der Gesamtspannung  $\sigma$  für das generalisierte Maxwell-Modell ergibt sich aus der Summe der einzelnen Maxwellarme mit der Steifigkeit der Gleichgewichtsfeder  $E_0$  zu dem Ausdruck

$$\sigma^{t_{n+1}} = E_0 \epsilon^{t_{n+1}} + \sum_{j=1}^N h_j^{t_{n+1}} \quad (2.65)$$

### 2.3.3 Viskoelastischer Tangentenmodul

Für die Implementierung in einen FE-Code ist eine direkte Beziehung zwischen der Dehnung  $\epsilon^{t_{n+1}}$  und der Spannung  $\sigma^{t_{n+1}}$  notwendig, siehe dazu auch Abschnitt 2.4.1. Der viskoelastische Tangentenmodul (*viscoelastic tangent modulus*)  $C^{v,t_{n+1}}$  wird für eindimensionale Probleme aus folgendem Differential gebildet:

$$C^{v,t_{n+1}} = \frac{\partial \sigma^{t_{n+1}}}{\partial \epsilon^{t_{n+1}}} = \left( 1 + \sum_{j=1}^N \gamma_j \cdot \frac{1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right)}{\frac{\Delta t}{\tau_j}} \right) \cdot E_0 \quad \text{mit} \quad \gamma_j = \frac{E_j}{E_0} \quad (2.66)$$

Der Tangentenmodul ist somit lediglich von den Materialparametern und dem Zeitschritt  $\Delta t$  abhängig.

Für Untersuchungen im zwei- bzw. dreidimensionalem Raum reichen skalare Beziehungen nicht aus. Aus diesem Grund müssen die Materialgesetze in tensorieller Form vorliegen. Die Herleitung ist jedoch analog zu der skalaren Berechnung. Der viskoelastische Tangentenmodul wird für räumliche Probleme zu einem Tensor vierter Stufe

$$\mathbb{C}^{v,n+1} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{n+1}} = \left[ 1 + \sum_{j=1}^N \gamma_j \cdot \frac{1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_j}\right)}{\frac{\Delta t}{\tau_j}} \right] \mathbb{C}^e, \quad (2.67)$$

wobei  $\mathbb{C}^e$  einen isotropen Elastizitätstensor beschreibt (Gleichung 2.84, aber mit konstanten Moduln). Für konstante Zeitschrittweiten und Parameter ist der viskoelastische Tangentenmodul ebenfalls konstant.

Die Implementierung gestaltet sich dementsprechend einfach. Die einzige Problematik besteht darin die spannungsgleichen Geschichtsvariablen  $h_j^{t_n}$ , die zur Berechnung der aktuellen Spannung der einzelnen Maxwellarme benötigt werden, zu speichern. Hierzu müssen an jedem Gausspunkt  $N$  Variablen gespeichert werden, die durch alle Ebenen des FE-Codes hindurchgereicht werden müssen. Die in Abschnitt 2.4 beschriebenen Konstitutivgesetze für die Materialien der ToB benötigen hingegen keine Geschichtsvariablen. Grundsätzlich sind allerdings eine Vielzahl von Materialgesetzen auf Geschichtsvariablen angewiesen, deren Anzahl natürlich von Material zu Material schwankt. Die effiziente Bereitstellung des benötigten Speicherplatzes gestaltet sich in einem prozeduralen Code schwierig, was der Erweiterbarkeit hinderlich ist. Es wäre sinnvoll, wenn jedes Material seine inneren Variablen selbst verwalten würde. Dieses Vorgehen erlaubt die Objektorientierung, was allerdings größere Änderungen am existierenden Code zur Folge hätte und vermutlich negative Auswirkungen auf die Performance hat. Eine objektorientierte Implementierung wurde daher nicht vorgenommen.

### 2.3.4 Verifikation

Die Verifikation der Implementierung erfolgt durch Vergleich mit analytischen Lösungen für Kriechen und Relaxation. Hierzu wird ein vereinfachtes GMM verwendet. Bei Verwendung von nur 1 Maxwell-Arm wird das GMM zum sogenannten „3-Parameter-Modell“, auch Standard-Linear-Solid genannt. Die verwendeten Parameter lauten  $E_\infty = 1000 \text{ MPa}$ ,  $E_1 = 4000 \text{ MPa}$ ,  $\eta_1 = 400 \text{ MPa}\cdot\text{s}$ . Mit diesen Parametern ergibt sich ein instantaner Modul  $E_0 = 5000 \text{ MPa}$ .

Kriechen bezeichnet den verzögerten Dehnungsaufbau eines Materials unter konstanter Spannung. Die Kriechfunktion für das Standard-Linear-Solid lautet

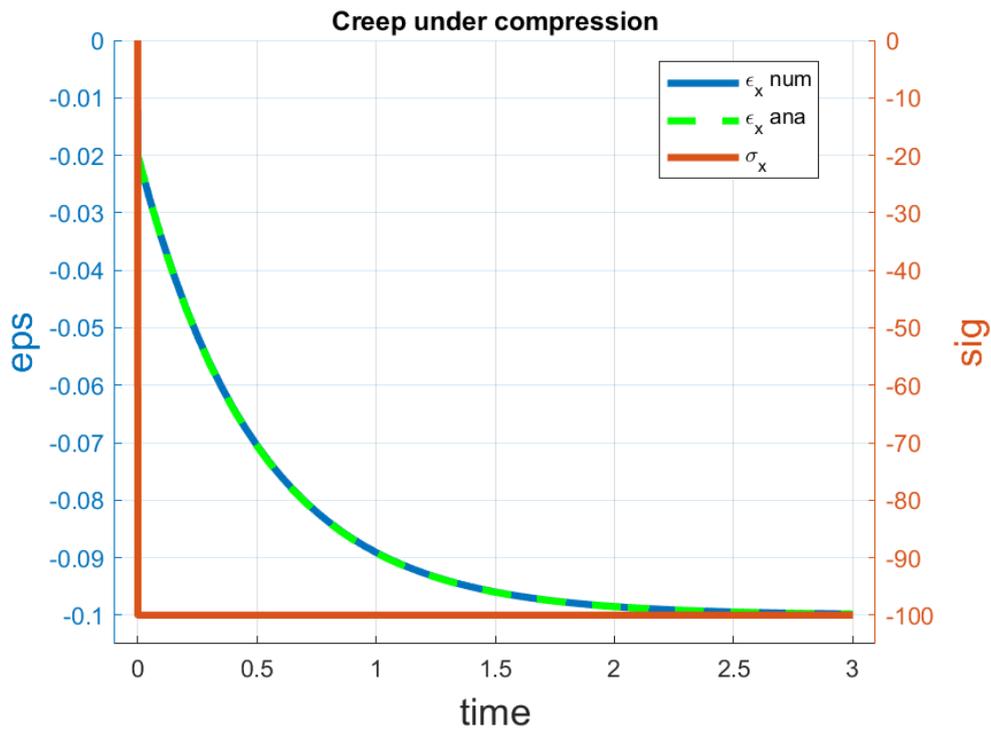
$$J(t) = \frac{\epsilon_t}{\sigma_0} = \frac{1}{E_\infty} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{1}{E_\infty + E_1} e^{-\alpha t}, \quad (2.68)$$

mit der Abkürzung  $\alpha = \frac{E_\infty E_1}{(E_\infty + E_1) \eta_1}$ .

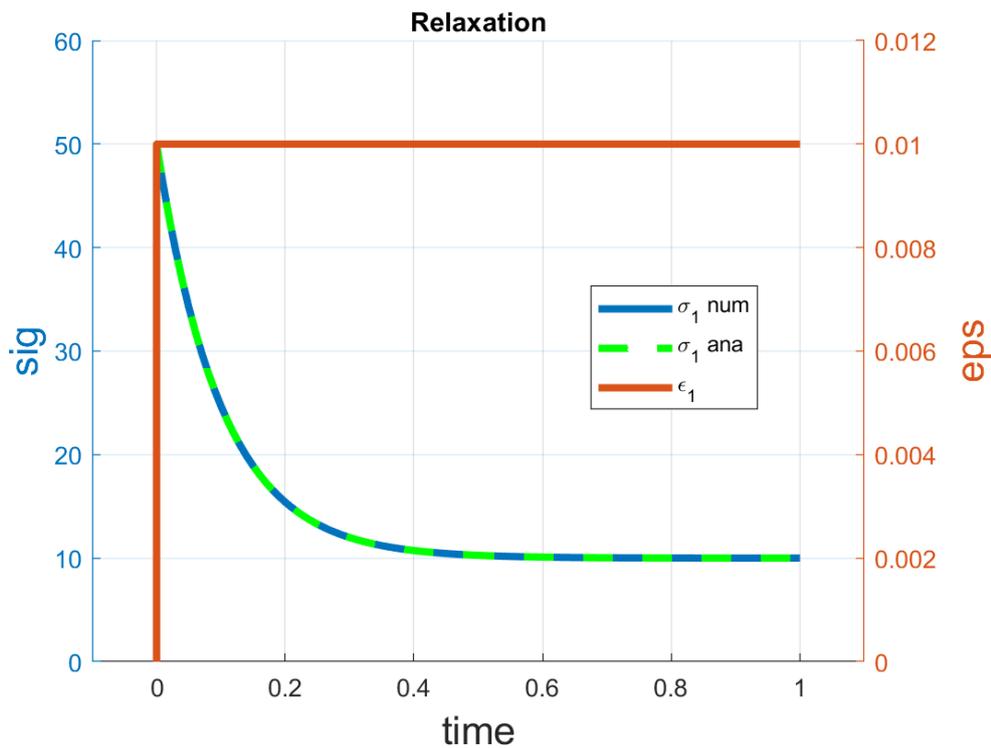
Relaxation bezeichnet den verzögerten Abbau von Spannung (Dissipation) unter konstanter Dehnung. Die Relaxationsfunktion für das SLS lautet

$$G(t) = \frac{\sigma_t}{\epsilon_0} = E_\infty + E_1 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (2.69)$$

In Bild 2.26a wird gezeigt, dass die numerische Lösung bei geeigneter Zeitschrittweite die analytische Lösung für den Lastfall Kriechen perfekt wiedergeben kann. Gleiches gilt für die Relaxation in Bild 2.26b



(a) Lastfall Kriechen. Analytische und numerische Lösung für die im Text angegebenen Parameter und eine konstante Druckspannung von  $-100 \text{ MPa}$ .



(b) Lastfall Relaxation. Analytische und numerische Lösung für die im Text angegebenen Parameter und eine konstante Dehnung von  $0,01$ .

## 2.4 AP 240: Tragschichten ohne Bindemittel und nichtlineare Eigenschaften

Im Gegensatz zur linearen Elastizität muss das Lösungsverfahren für viskoelastisches und hypoelastisches Materialverhalten modifiziert werden. Die Gleichung 2.17 kann nicht mehr direkt gelöst werden. In der schwachen Form der Gleichgewichtsbedingung beinhaltet der Term der inneren Energie nun die nichtlineare Spannung. Üblicherweise ist diese von der Dehnung, und damit wiederum von der Verschiebung abhängig:  $\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})]$ .

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\sigma} \, dV = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] \, dV \quad (2.70)$$

### 2.4.1 Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

Da die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems nicht direkt möglich ist, wird eine Taylorreihen-Entwicklung um den aktuellen Arbeitspunkt (die aktuelle Verschiebung) durchgeführt, welche nach dem ersten Differentialglied abgebrochen wird.

$$\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] = \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_k)] + \underbrace{(u - u_k)}_{\Delta u} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(u_k)}{\partial \mathbf{u}} + \dots \quad (2.71)$$

Hierbei stellt  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  die sogenannte konsistente (algorithmische) Tangente dar. Diese Linearisierung der nichtlinearen Konstitutivbeziehung wird nun in die schwache Form eingesetzt. Damit erhält die linke Seite von Gleichung 2.1 einen zusätzlichen Term.

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad (2.72)$$

$$\approx \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_k)] \, dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^\top \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}}}_{\mathbb{C}_{NL}} \, dV \cdot \delta \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{B} \quad (2.73)$$

$$= \underbrace{\int_V \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_k)] \, dV}_{\text{Residualsteifigkeit}} + \underbrace{\int_V \mathbf{B}^\top \mathbb{C}_{NL} \mathbf{B} \, dV}_{\text{Tangentenmatrix}} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (2.74)$$

Die Residualsteifigkeit ist ein Vektor und wird auf die rechte Seite geholt. Nun muss iterativ ein lineares Gleichungssystem gelöst werden, wobei beim echten Newton-Verfahren die Tangentensteifigkeit in jedem Iterationsschritt neu bestimmt wird, siehe u.a. Wriggers 2008; Dahmen und Reusken 2008; Bower 2009.

## 2.4.2 Vorbemerkungen zur Modellierung ungebundener Materialien im Verkehrswegebau

Nichtlineares elastisches Verformungsverhalten kann bei einigen Materialien, die im Verkehrswegebau eingesetzt werden, zutreffend mit einer modifizierten Theorie nach Hertz beschrieben werden. Bei der Hertz'schen Theorie wird davon ausgegangen, dass Ansammlungen sphärischer Partikel Kräfte über die Kontaktpunkte der Partikel weiterleiten und dass bei einer Erhöhung der Kontaktspannungen infolge elastischer Deformationen der Partikel eine Vergrößerung der Kontaktflächen auftritt. Bei Lasterhöhung wächst infolge der Vergrößerung der Kontaktflächen die Kontaktspannung langsamer als die übertragene Kontaktkraft. Dieser Effekt führt zu einer Versteifung der Partikelansammlung.

Auf Basis dieser Überlegungen wurden verschiedene Stoffmodelle zur Beschreibung der elastischen Verformungseigenschaften granularer Materialien entwickelt. Hierbei war die ursprüngliche Theorie nach Hertz zu modifizieren, da granulare Materialien, die im Verkehrswegebau Anwendung finden, in den meisten Fällen aus gebrochenen Gesteinskörnern bestehen und keine sphärische Geometrie besitzen. Die Modellierung fußt auf der Annahme, dass Setzvorgänge, also plastische Deformationen, während der ersten Belastungen stattfinden und sich die Struktur auf ein elastisches Verhalten einspielt. Das Materialverhalten ist nach Setzvorgängen in guter Näherung als „hypoelastisch“ zu beschreiben, d.h. nichtlinear, aber mit kleinen (i.e. linearen) Verformungen (Tacioglu und Hjelmstad 2002). Zahlreiche Ansätze zur Beschreibung dieses Verhaltens existieren, erste Arbeiten von Hicks und Monismith 1971 verwendeten ein spannungabhängiges Potenzgesetz, das sogenannte  $k$ - $\Theta$ -Modell. Weitere Beschreibungen liegen mit dem Lade-Nelson-Modell (Lade und Nelson 1987), dem Universal-Modell nach Uzan 1985; Uzan 1992, sowie dem Dresdner Modell (Queck 1992; Wellner 1993; Numrich 2003) vor.

Im Folgenden werden diese Symbole verwendet:

$E$  Elastizitätsmodul nach Einspielvorgängen

$k, n, m$  Parameter, per Regression zu bestimmen

$p_a$  Atmosphärendruck (100 kPa) <sup>8</sup>

$\sigma_i$   $i$ -te Hauptspannungskomponente,  $i = \{1, 2, 3\}$

$I_1$  Erste Spannungsinvariante

$\Theta$  Betrag von  $I_1$

$\tau_{oct}$  Oktaederschubspannung

---

<sup>8</sup>Tacioglu und Hjelmstad 2002 bemerken, dass hier nicht notwendigerweise der Atmosphärendruck verwendet werden muss, sondern dass der Nenner lediglich der Entdimensionalisierung des Zählers dient.

$\nu$  Poissonzahl

Die erste Spannungsinvariante  $I_1$  ist die Spur des Cauchy-Spannungstensors<sup>9</sup> und berechnet sich folgendermaßen

$$I_1 = \text{spur}\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{kk}$$

Da es sich um eine Invariante handelt, kann  $I_1$  auch über die Summe der Hauptspannungen berechnet werden.

Der Cauchysche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  kann als Summe zweier anderer Spannungstensoren ausgedrückt werden:

1. ein mittlerer hydrostatischer (volumetrischer, formerhaltender) Spannungstensor,  $\boldsymbol{\sigma}_h$ , der das Volumen des spannungsbehafteten Körpers ändert, sowie
2. ein deviatorischer (verzerrender) Spannungstensor,  $\boldsymbol{\sigma}_d$ .

Für die Summanden gilt

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \frac{I_1}{3}\delta_{ij} = p\delta_{ij} \quad (2.75)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3}\delta_{ij} \quad (2.76)$$

Die Oktaederspannung ist eine Vergleichsspannung, ähnlich der von-Mises-Spannung. Sie kann über die zweite Invariante der Deviatorspannung,  $J_2$ , definiert werden

$$J_2 = \frac{1}{2}\text{spur}(\boldsymbol{\sigma}_d^2) \quad (2.77)$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} \quad (2.78)$$

---

<sup>9</sup>Im Rahmen kleiner Deformationen sind die verschiedenen Spannungsmaße äquivalent.

### 2.4.3 $k$ - $\Theta$ -Modell

Das  $k$ - $\Theta$ -Modell nach Hicks und Monismith 1971 ist ein Potenzgesetz. In der ursprünglichen Veröffentlichung wird  $\Theta = I_1$  gesetzt. Das führt unter Druck aber zu negativen Moduln und ist damit unphysikalisch. Taciroglu und Hjelmstad 2002 definieren daher

$$\Theta = |I_1| \quad (2.79)$$

Dieser Fehler wiederholt sich bei Uzan 1992. Vermutlich liegt das daran, dass negative Spannungen als positive Drücke zählen und ebendiese Drücke in der Parameteridentifikation verwendet wurden.

$$E(\boldsymbol{\sigma}) = k \left( \frac{\Theta}{p_a} \right)^n \quad (2.80)$$

### 2.4.4 Universal-Modell

Beim „Universal“-Modell wird der Elastizitätsmodul mittels

$$E(\boldsymbol{\sigma}) = k \left( \frac{\Theta}{p_a} \right)^n \left( \frac{\tau_{oct}}{p_a} \right)^m \quad (2.81)$$

berechnet. Unter Umständen (um die Pfadabhängigkeit zu beheben) muss zusätzlich eine nichtlineare Poissonzahl definiert werden, die jedoch mit zwei weiteren Parametern charakterisiert werden muss. Die Parameter wurden nach Taciroglu und Hjelmstad (2002, Tab. 2, Zeile 1) gewählt.

### 2.4.5 Dresdner Modell

Das Dresdner Modell geht auf die Arbeiten von Queck (1992) und Wellner (1993) zurück. Wie das Universal-Modell ist es spannungsabhängig. Es scheinen verschiedene Formen dieses Modells zu existieren. Oeser (2010) beschreibt das Modell in Abhängigkeit von Spannungen in einem Zylinderkoordinatensystem. Diese können jedoch wieder über Spannungsinvarianten ausgedrückt werden. Im folgenden wird die Form nach Numrich (2003) verwendet. Diese lautet

$$E(\boldsymbol{\sigma}) = (Q + C|\sigma_3|^{Q_1}) |\sigma_1|^{Q_2} + D \quad (2.82)$$

$$\nu(\boldsymbol{\sigma}) = R \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_3|} + A|\sigma_3| + B \quad (2.83)$$

, wobei  $Q, C, Q_1, Q_2, D, R, A$ , und  $B$  Materialparameter sind. Diese wurden nach Numrich (2003, Kap. 7.3.3) gewählt.

Wird jedoch, etwa im Falle von uniaxialer Deformation, die kleinste Hauptspannung 0, dann wird  $\nu$  indefinit. Wie in Numrich (2003) vorgeschlagen, wird daher für die Querkontraktionszahl ein Maximum von  $\nu = 0.49$  gewählt. Weiterhin wird berichtet

Gesteinskornmische können keine bzw. nur sehr begrenzt Zugspannungen aufnehmen. Deshalb wurde dieses Stoffgesetz nur für den Druckspannungsbereich aufgestellt (große und kleine Hauptspannungen negativ). Bei Berechnungen mit der FEM müssen demnach in Berechnungszwischenschritten auftretende Zugspannungen iterativ zu Druckspannungen auf die benachbarten Elemente umgelagert werden. ((Numrich 2003, S. 12))

Eine konkrete Formulierung bleibt die Arbeit allerdings schuldig.

Nguyen u. a. (2003) und Alipour und Scarpas (2015) beschreiben ausführlich wie ein solches „No-Tension“ Verhalten, wie es in granularen Materialien häufig auftritt, numerisch behandelt werden kann. Allerdings leiten sich die Konstitutivgleichungen aus einem Potential her. Oeser (2010) argumentiert, dass granulare Materialien sehr wohl Zugspannungen übertragen können, allerdings nur in sehr geringem Ausmaß. Diese Eigenschaft wird auf „Interlocking“ zurückgeführt, also auf die Kraftübertragung durch Reibung und Verzahnung. Da die simple Wahl von  $E = 0$  im Falle der Berechnung eines vermeintlich negativen Moduls zu numerischen Problemen führt, wurde mit den Beträgen der Hauptspannungen gearbeitet.

## 2.4.6 Hinweise zu spannungsabhängigen Modellen

Diese Modelle haben gemeinsam, dass sie zwar einen spannungsabhängigen Modul, aber noch keine Konstitutivbeziehung darstellen. Eine häufig verwendete Methodik besteht darin den konstanten E-Modul im Hookeschen Modell, sowie eventuell die Querkontraktionszahl laut den zuvor beschriebenen Modellen zu ersetzen.

$$\mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{E(\boldsymbol{\sigma})}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Diese Formulierungen haben laut Taciroglu und Hjelmstad 2002 einige problematische Eigenschaften, von denen nicht alle durch Erweiterungen behoben werden können. Für eine tiefgehende Diskussion verweisen wir auf die in ebenjener Publikation enthaltene Diskussion. Mit Hinblick auf das in Abschnitt 2.4.1 beschriebene Lösungsverfahren sei

hier erwähnt, dass es sich bei Gleichung 2.84 nicht um die Materialtangente  $\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}$  handelt. Da Gleichung 2.84 nicht von der Dehnung, und damit nicht von der Verschiebung im Entwicklungspunkt der Taylorreihe abhängt, stellt dieser Tensor keine konsistente Linearisierung dar, sondern nur eine Sekante. Unter anderem entstammen diese Probleme der Eigenschaft, dass sich diese Modelle nicht aus einem Potential, einer Dehnungsenergie-dichtefunktion (engl. strain energy density function), herleiten lassen. Damit einhergehende problematische Eigenschaften sind Wegabhängigkeit, fehlende thermodynamische Konsistenz, sowie nichteindeutige Spannungs-Dehnungs-Beziehungen.

## 2.4.7 Weitere Modelle

Das Modell von Boyce 1980 wird intensiv in Numrich 2003 verwendet. Ebendort wird sowohl von Problemen bei der Parameteridentifikation, als auch von numerischen Problemen berichtet. Immerhin ist es wohl thermodynamisch konsistent (Loret 1985). Experimente von Karahasin u. a. 1993 zeigen, dass das Boyce-Modell nicht nennenswert besser in der Vorhersage des elastischen Moduls sei, als das  $k - \Theta$ , oder der Vorgänger des Universal-Modells, das Uzan-Witczak-Modell.

Lade und Nelson (1987) schlagen ein Model vor, dass zwar spannungsabhängig ist, sich jedoch trotzdem aus einer Dehnungsenergie-dichtefunktion herleiten lässt:

$$E(\sigma) = k \left[ \left( \frac{\Theta}{p_a} \right)^2 + \alpha \left( \frac{3\tau}{p_a} \right)^2 \right]^n \quad (2.85)$$

$$\alpha = \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \quad (2.86)$$

Dies gilt jedoch nur für den Fall einer konstanten Querkontraktionszahl, was für granulare Materialien nicht realistisch ist (Uzan 1992).

Stolle u. a. (2009) haben Untersuchungen an 36 Gesteinsmischungen für ungebundene Tragschichten durchgeführt und festgestellt, dass der Einfluss des formändernden (deviatorischen) Spannungsanteils einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Steifigkeit der Gesteinsmischungen hat. Bereits in einer früheren Veröffentlichung wurde eine lineare Beziehung zwischen Modul und Spannung vorgeschlagen

$$M_r = m \left( \frac{\Theta}{p_a} \right) + b$$

Die Autoren argumentieren, dass eine lineare Beziehung die Parameteridentifikation vereinfacht.

## 2.4.8 Praktische Aspekte spannungsabhängiger Modelle

Tacıroglu und Hjelmstad (2002) bemerken, dass das Universal-Modell für die Implementierung in einen FE-Code nicht optimal geeignet sei. Da Gleichung 2.81 und Gleichung 2.82 nicht dehnungsabhängig sind, ist den Autoren dieses Berichts nicht bekannt wie die konsistente Linearisierung durchzuführen wäre. Unter anderem diese Implementierung verwendet daher statt des Tangentenmoduls den Sekantenmodul nach Gleichung 2.84, wodurch die Konvergenzeigenschaften des Newton-Verfahrens verschlechtert werden. Es kann im Allgemeinen nicht mit quadratischer Konvergenz in der Nähe der Lösung gerechnet werden.

Weitere Probleme ergeben sich aus daraus, dass zu Anfang der Berechnung das System spannungsfrei ist. Dies ergibt jedoch für das Universal-Modell einen Modul von 0, was zum einen unphysikalisch ist, zum anderen zu beliebigen Verschiebungen führt. Daher wird in den ersten beiden Iterationen des Newton-Verfahrens, d.h. bis ein vom Nulltensor verschiedener Spannungstensor übergeben wird, mit  $E = 10k$  gerechnet. Um die sofortige Konvergenz des Verfahrens zu verhindern wird eine falsche Spannung zurückgegeben. Sobald ein nichttrivialer Spannungszustand übergeben wird, wird der Modul per Gleichung 2.81 ausgerechnet und in das Hookesche Gesetz (Gleichung 2.84) eingesetzt.

Beim Dresdner-Modell sorgt der Parameter  $D$ , der den spannungsunabhängigen Anteil des E-Moduls beschreibt, dafür, dass Gleichung 2.82 nicht auf 0 fällt.

## 2.4.9 Verifikation

Beide Materialmodelle wurden mittels spannungsgesteuerter uniaxialer Kompression einer Verifikation unterzogen. Die Geometrie und die Randbedingungen des Verifikationsproblems sind in Bild 2.27 dargestellt, abweichend vom Bild wurde jedoch ein 3D-Problem gerechnet. Es wurde ein einzelnes voll integriertes quaderförmiges Element mit linearen Ansatzfunktionen verwendet.

### Universal-Modell

Im dargestellten Fall konvergiert das Newton-Verfahren selbst wenn die Belastung in einem Schritt aufgebracht wird. Hierzu sind allerdings viele Newton-Iterationen nötig. Auffällig ist, dass je nach Anzahl der Lastschritte eine andere Verschiebung und damit auch Dehnung erreicht wird. Ob das an der Wegabhängigkeit, sowie der Nichteindeutigkeit der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Konstitutivgesetzes, oder an bislang nicht bekannten Fehlern in der Implementierung liegt, konnte nicht ermittelt werden. Die Spannungs-Dehnungs-Kurve für das Verifikationsbeispiel ist in Bild 2.28 zu sehen.

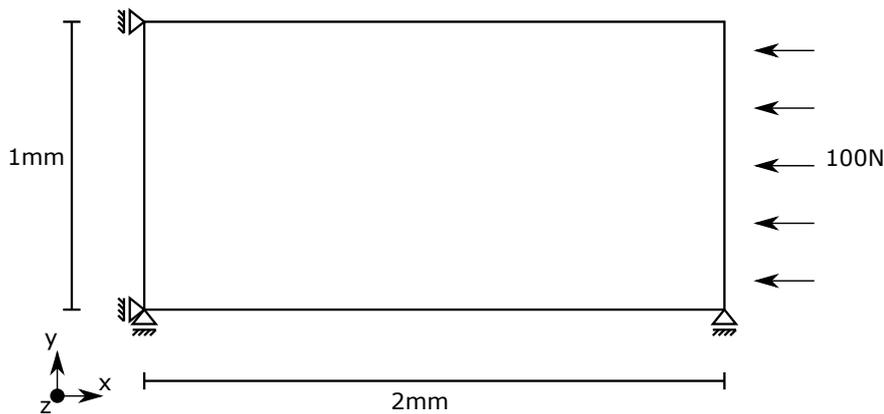


Bild 2.27: Geometrie und Randbedingungen des Verifikationsproblems.

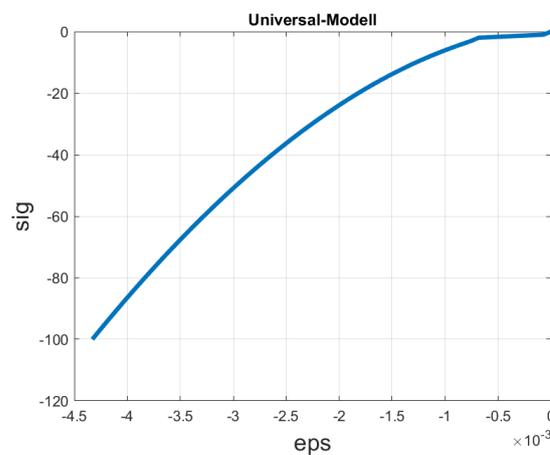
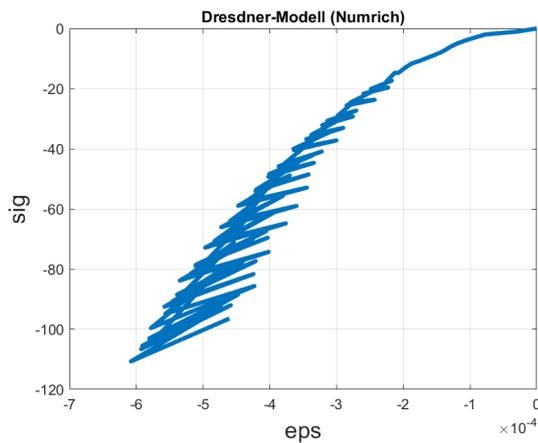


Bild 2.28: Spannungs-Dehnungs-Kurve des Universal-Modells für das Verifikationsproblem.

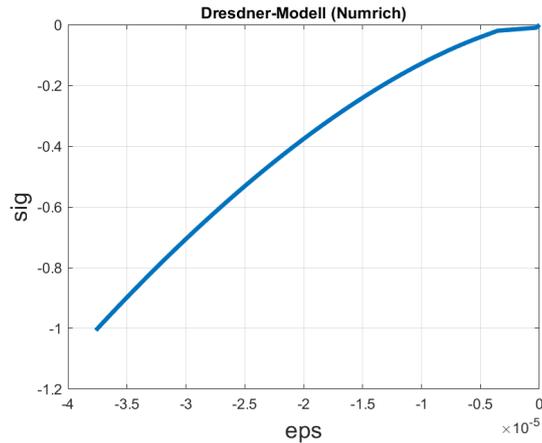
### Dresdner-Modell

Das Dresdner-Modell konvergiert im vorliegenden Fall nicht, siehe Bild 2.29a. Auffallend ist besonders, dass die Spannungen an den Gausspunkten sich mit zunehmender Anzahl an Newton-Iterationen immer stärker voneinander unterscheiden. Im vorliegenden Fall uniaxialen Verhaltens sollten sich alle Gausspunkte identisch verhalten. Ob das an volumetrischem Locking des linearen Elements, oder an starker Fehlerfortpflanzung des Modells liegt, ist unklar.

Zusätzlich wurde versucht durch stärker einschränkende Lagerungen Konvergenz zu erreichen. Die Lagerung wurde so verändert, dass nur noch Verschiebung in x-Richtung möglich ist. Damit wird zwar die Oszillation der Spannungen an den Gausspunkten verhindert, allerdings konvergiert das Newton-Verfahren dennoch nicht.



(a) Spannungs-Dehnungs-Kurve des Dresdner-Modells für  $\sigma_x = -100$  MPa.



(b) Spannungs-Dehnungs-Kurve des Dresdner-Modells für  $\sigma_x = -1$  MPa.

Eine robuste Konvergenz konnte erst durch eine drastische Reduktion der anliegenden Spannung auf  $\sigma_x = -1$  MPa erreicht werden, siehe Bild 2.29b.

Besonders auffallend ist beim Dresdner-Modell, dass die Gleichung für die Querkontraktion für uniaxiale Belastung überflüssig ist. Da  $\sigma_1 \gg \sigma_3$  wächst  $\nu$  über den physikalisch sinnvollen Bereich hinaus und wird künstlich auf 0.49 gesetzt, was zu annähernd inkompressiblem Materialverhalten führt. Zwar gibt es in Straßenaufbauten keinen rein uniaxialen Spannungszustand, jedoch wird es Regionen geben, in denen die dritte Hauptspannung annähernd 0 wird. Die damit einhergehenden Fallunterscheidungen und Begrenzungen sind numerisch nicht günstig.

### Abschließende Bemerkung

Die bislang gesammelten Erfahrungen mit den beiden implementierten Modellen sind nicht vielversprechend. Die von Taciroglu und Hjelmstad (2002) geübte Kritik am Universal-Modell gilt aufgrund der identischen Konzeption als spannungsabhängiges und nicht aus einem Potential abgeleitetes Modell vermutlich ebenso für das Dresdner-Modell. Es wird vorgeschlagen zukünftig auf thermodynamisch konsistente Modelle zurückzugreifen, die sich aus einem Potential herleiten lassen. Etwaige Kandidaten sind in Taciroglu und Hjelmstad 2002 und Nguyen u. a. (2003) beschrieben. Mit Hinblick auf die rechnerische Dimensionierung muss auf gute Konvergenzeigenschaften geachtet werden. Weiterhin sollte es nur eine überschaubare Anzahl und gut bestimmbar Parameter geben.

## 2.5 AP 250: Schichtenverbund, Last- und Temperaturabhängigkeiten

Es stehen mehrere Verfahren zur Modellierung des Schichtenverbunds zur Auswahl. Grundsätzlich kommen

- Kontaktmodelle,
- Grenzschichtelemente, sowie
- Kohäsivzonenelemente

in Frage. Da sich die einzelnen Schichten von Asphaltstraßen — im Gegensatz zu Betonstraßen — in der Regel nicht voneinander abheben, handelt es sich um kein Kontaktproblem und die Modellierung hierüber wäre nicht zielführend. Auch die Tangentialverschiebung der Schichten untereinander ist klein ( $\epsilon \ll 1$ ). Als Grenzschichtelemente werden hier beispielsweise die im Arbeitspapier zur Dimensionierung von Verkehrsflächenbefestigungen, Teil B 4: Schichtenverbund bei der Dimensionierung von Asphaltbefestigungen (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen (FGSV) 2011), siehe auch Oeser (2010), genannten Elemente bezeichnet. Diese modellieren einen rein elastischen Zusammenhang zwischen Grenzschichtverschiebung und Spannung in der Grenzschicht. Im Grunde stellen intrinsische CZE eine Verallgemeinerung dieser Grenzschichtelemente dar. Über die rein elastische Antwort hinaus, werden die Schädigung, sowie die schließliche Delamination abgebildet, siehe Bild 2.30. Gerade im Bereich duktiler Materialien, wie Asphalt, sind CZE bruchmechanischen Ansätzen überlegen, da die Prozesszone durchaus finite Dimensionen annehmen darf, sowie das Versagen auch in seiner Entstehung beschrieben werden kann.

CZE werden in der Analyse und Simulation der Rissentstehung und Fortpflanzung für homogene, als auch inhomogene Materialien verwendet. Die Ursprünge der CZE gehen auf die Arbeiten von Dugdale (1960) und Barenblatt (1962) zur Modellierung von duktilem und spröden Materialversagen zurück. Später propagierten sowohl Xu und Needleman (1994), als auch Camacho und Ortiz (1996) die Verwendung von potentialbasierten Konstitutivbeziehungen und stellten eine Implementierung in die FEM vor.

Grundsätzlich kann das Risswachstum in drei verschiedene Moden unterteilt werden, siehe Bild 2.31. Diese sind:

- Modus I Riss — Rissöffnung durch eine Zugspannung normal zur Rissebene,
- Modus II Riss — Sliding durch eine Schubspannung parallel zur Rissebene und senkrecht zur Rissfront, sowie
- Modus III Riss — Tearing durch eine Schubspannung parallel zur Rissebene und parallel zur Rissfront.

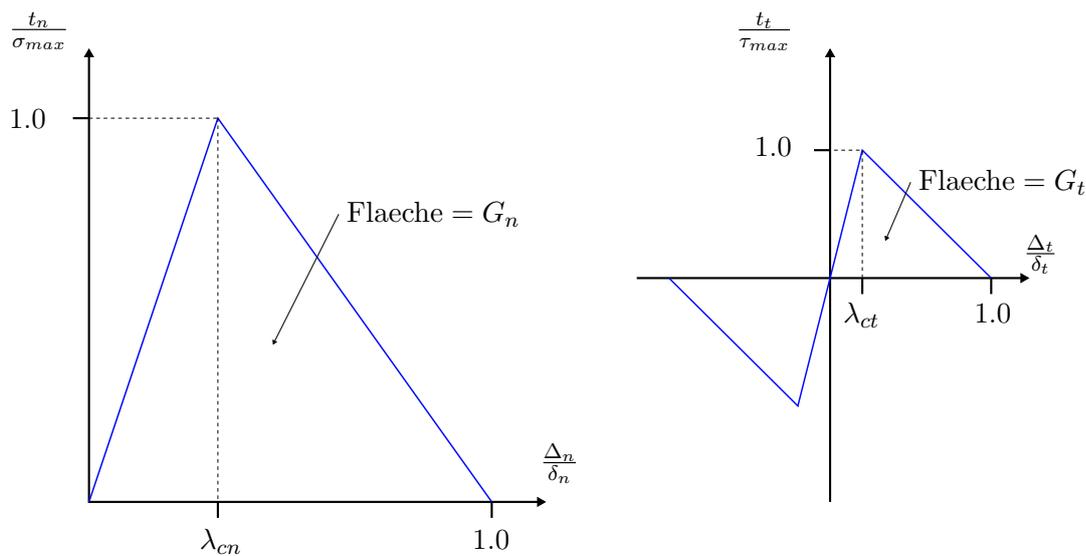


Bild 2.30: Darstellung eines bilinearen Kohäsivgesetzes unter monotoner Belastung bis zum Bruch. Spannungen und Rissöffnungen sind normiert durch die jeweiligen Maximalwerte  $\sigma_{max}$  und  $\tau_{max}$ , bzw.  $\delta_n$  und  $\delta_t$ . Auf der linken Seite wird die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung in Normalenrichtung (Modus I, s.u.) dargestellt. Die Kohäsivspannung  $t_n$  steigt mit wachsender Rissöffnung  $\Delta_n$  bis zum Erreichen des kritischen Rissöffnungsverhältnisses  $\lambda_{cn}$  an. Dies stellt den elastischen Anteil dar, welcher komplett reversibel ist. Danach erweicht, bzw. schädigt das Material, bis zum vollständigen Materialversagen bei  $\delta_n$ . Eine Entlastung in diesem Bereich führt nicht mehr auf der gleichen Kurve zurück. Die Fläche unter der Kurve stellt die Bruchenergie  $G_n$  dar. Auf der rechten Seite wird das Modellverhalten in tangentialer Richtung dargestellt. Hier ist das Modellverhalten prinzipiell identisch, es wird lediglich angenommen, dass ein Schub in umgekehrter Richtung zu punktsymmetrischem Verhalten um den Ursprung führt.

Die Beschreibung des Rissöffnungsverhaltens ist aufgrund der Vielzahl der behandelbaren Phänomene, bzw. Materialien, unterschiedlich. Es lassen sich sowohl sprödes Materialverhalten, als auch duktiles Materialverhalten modellieren. In Bild 2.32 sind unterschiedliche Verläufe von Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen dargestellt.

Für die Simulation von Asphalt verwendeten de Souza u. a. (2004) das von Tvergaard (1990) vorgeschlagene Kohäsivgesetz zur Untersuchung der Rissfortpflanzung im indirekten Spaltzugversuch. Kim, Allen u. a. (2005) verwendeten ein Kohäsivgesetz welches eine durch Seidel (2002) vereinfachte Version des Modells von Yoon und Allen (1999) darstellt. Eine synthetische zweidimensionale Geometrie eines Asphaltprobekörpers wurde mittels Voronoi-Tessellierung erstellt. Simulationen von uniaxialem Zug unter Einfluss verschiedener Dehnraten wurden untersucht, allerdings erfolgte kein Vergleich mit Experimentaldaten auf der Makroskala. Ein bilineares Kohäsivgesetz wurde

**Aus urheberrechtlichen Gründen wird  
dieses Bild nicht angezeigt**

Bild 2.31: Die drei Bruchmoden nach Irwin (1957). Lizenz: Public Domain: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fracture\\_modes\\_v2.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fracture_modes_v2.svg)

von Kim und Buttlar Kim und Buttlar 2009a; Kim und Buttlar 2009b in ein diskrete Elemente Modell implementiert um die Rissentstehung und das Risswachstum in einem gekerbten Asphaltzylinder zu untersuchen. Die Belastung geschah hauptsächlich in Modus I. Verschiedene Parametersätze wurden zur Modellierung des Versagens innerhalb des Asphaltmörtels, sowie des Versagens innerhalb der Grenzfläche zwischen Mörtel und Gesteinskörnern verwendet. Aragão u. a. (2011) verwendeten ebenfalls ein bilineares Kohäsivgesetz dessen Parameter anhand relativ schneller und kostengünstiger Laborversuche bestimmt werden können. Ein heterogenes Modell eines Asphaltprobe-körpers unter uniaxialen Zug wurde erstellt und CZE in die Matrixphase integriert. Wang u. a. (2014) verwendeten sowohl CZE, als auch diskontinuierliche finite Elemente (XFEM, siehe Moës u. a. 1999) zur Untersuchung des Rissverhaltens von zufallsbasierten Mikrostrukturmodellen von Asphalt.

Ein gravierender Nachteil all dieser Modelle ist die Beschränkung auf zweidimensionale Geometrien, was bereits für die Vorhersage der Steifigkeiten von Asphalt nicht ausreichend ist. Verschiedene Forschergruppen berichten, dass 2D-Modelle die Spannungen gegenüber einem 3D-Modell unterschätzen (Mo u. a. 2008; Coleri u. a. 2012; Chen, Wang und Li 2015; Ozer u. a. 2016). Jüngere Arbeiten bezüglich der Vorhersage von Asphalteeigenschaften verwenden daher echte dreidimensionale Geometrien. Hierzu werden synthetische Geometrien (Wimmer u. a. 2014; Neumann, Simon, Mollenhauer u. a. 2017; Neumann, Simon und Reese 2019), als auch Bilddaten-basierte Geometrien verwendet (Liu, Hu u. a. 2017). Eine Mischung dieser beiden Vorgehensweise stellen die Strukturmodellierungen von Schüler u. a. (2016) und Chen, Wang, Dan u. a. (2018) dar, die eine synthetische 3D-Modellierung auf Basis von Bilddaten vorschlagen. Die einzige den Autoren dieser Studie bekannte Arbeit, die das dreidimensionale Bruchverhalten von Asphalt untersucht ist die Arbeit von Liu, Hu u. a. (2017), die ein in ABAQUS implementiertes bilineares CZE verwendeten.

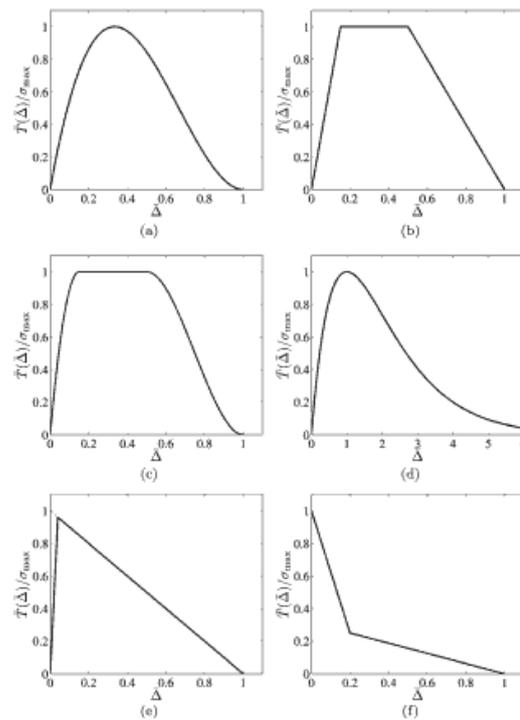


Bild 2.32: Verschiedene Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen: **(a)** Polynomial (Needleman 1987), **(b)** Trapezoid (Tvergaard und Hutchinson 1992), **(c)** Ver rundetes Trapezoid (Scheider und Brocks 2003), **(d)** Exponential (Needleman 1990), **(e)** Bilinear (intrinsisch mit linearer Erweichung) (Hillerborg u. a. 1976), **(f)** Extrinsisch mit bilinearer Erweichung (Bažant 2002). Aus Park und Paulino (2013), ergänzt um Angaben aus Schwalbe u. a. (2013).

CZE betrachten den Bruch als ein allmähliches Phänomen bei denen die Trennung über eine verlängerte Riss Spitze, oder Bruchprozesszone, erfolgt, siehe Bild 2.33. Dem Bruchfortschritt widersetzen sich die Kohäsivspannungen  $T$ . CZE definieren den Bruchprozess, indem sie Kohäsivspannungen mit den Rissöffnungen (Separationen) in der Prozesszone verknüpfen. Konstitutive Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen wurden von zahlreichen Forschern formuliert. Es lassen sich hauptsächlich zwei verschiedene Gruppen unterscheiden, intrinsisch, sowie extrinsisch. Intrinsische CZE verfügen über einen initialen elastischen, oder viskoelastischen Bereich, ihre kritische Rissöffnung,  $\delta_c$  ist finit. Bild 2.32 zeigt in (a)–(e) Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen intrinsischer CZE, (f) stellt ein Beispiel für eine Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung eines extrinsischen CZE dar. Aufgrund des zur Beschreibung des Schichtenverbundes gewollten intrinsischen Verhaltens, wurde mit dem PPR-Modell ein solches implementiert. Es ist jedoch auch ohne weiteres möglich extrinsische Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen zu implementieren, da die Kinematik der Elemente unverändert bleibt. Extrinsische CZE werden meist nach Bedarf während der Simulation ins Netz integriert, was umfangreiche Netz-Aktualisierungs-Routinen nötig macht.

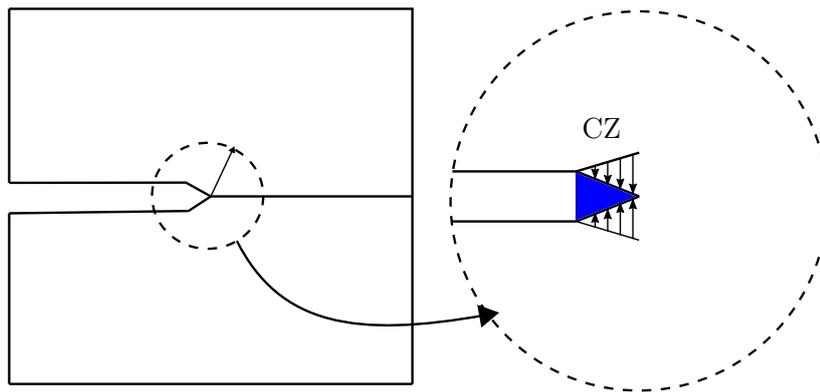


Bild 2.33: Schematische Darstellung einer Kohäsivzone mit Modus 1 Riss.

Damit eignen sich intrinsische CZE ideal für die verallgemeinerte Modellierung des Schichtenverbundes inkl. der Rissausbreitung. Im Folgenden wird die Implementierung eines CZE beschrieben, sowie die Möglichkeiten aufgezeigt. Die Wahl fiel hierbei auf das potentialbasierte CZE nach Park, Paulino und Roesler (2009) und Park und Paulino (2012), kurz PPR. Die 3D-Erweiterung macht sich auch die Arbeit von Turon (2006) zunutze.

### 2.5.1 Finite-Elemente-Formulierung

Wie für alle FE-Berechnungen gilt, dass zunächst die schwache Form aufgestellt werden muss. Diese ergibt sich aus den Bestandteilen Gleichgewicht, Kinematik und Stoffgesetz. Während das Gleichgewicht unverändert gilt, müssen Kinematik und Stoffgesetz auf die spezifischen Anforderungen von CZE angepasst werden. Idealerweise bleibt dabei die Modularität gewahrt, d.h., dass die Bestandteile Kinematik und Stoffgesetz größtenteils unabhängig voneinander sind. Einschränkungen existieren hier allerdings mit Bezug auf die Formulierung bezüglich kleiner, oder großer Deformationen. Es wird davon ausgegangen, dass für die Modellierung von Asphalt kleine Deformationen ausreichend sind. Die schwache Form (Gleichung 2.1) wird dahingehend modifiziert, dass ein neuer Term dazukommt, der die kohäsive Energie der Bruchfläche beinhaltet

$$\underbrace{\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{\top} \boldsymbol{\sigma} \, dV}_{\text{Virtuelle Arbeit der inneren Energie}} + \underbrace{\int_{\Gamma_c} \delta \boldsymbol{\Delta}^{\top} \mathbf{t}_c \, dA}_{\text{Virtuelle Arbeit der Bruchenergie}} = \underbrace{\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^{\top} \mathbf{b} \, dV}_{\text{Virtuelle Arbeit der Volumenlasten}} + \underbrace{\int_{\Gamma_c} \delta \mathbf{u}^{\top} \mathbf{t} \, dA}_{\text{Virtuelle Arbeit der Flächenlasten}} \quad , \quad (2.87)$$

wobei  $\boldsymbol{\Delta}$  die virtuelle Rissöffnung, sowie  $\mathbf{t}_c$  die Kohäsivspannung auf der Bruchfläche bezeichnet. Wie zuvor auch wird die Domäne  $\Omega$  in finite Elemente diskretisiert und das globale Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  wird durch Formfunktionen  $\mathbf{N}$  aus den Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}_i$  approximiert,

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) = \mathbf{N} \mathbf{u}_i \quad . \quad (2.88)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{X}$  die globalen Koordinaten. Da es sich bei CZE aufgrund der nicht vorhandenen Ausdehnung in Dickenrichtung nicht um Kontinuums-elemente handelt, und das Element statt mit Dehnungen und Spannungen mit Kohäsivspannungen und Rissöffnungen arbeitet, unterscheidet sich die Kinematik von üblichen Kontinuumsformulierungen.

## Kinematik

Die lokale Separation, oder Rissöffnung,  $\boldsymbol{\Delta}$  wird durch die Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}$  approximiert. Zur Berechnung der Separationen müssen allerdings auch die lokalen Knotenverschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$  bekannt sein. Diese unterscheiden sich von den globalen Knotenverschiebungen durch eine Rotation in das  $(\xi, \eta, \zeta)$  - Referenzsystem des CZE

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R} \mathbf{u} \quad , \quad (2.89)$$

wobei die Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  aus einer Koordinatentransformationsmatrix  $\mathbf{A}$  besteht.

Die Beziehung zwischen lokaler Separation und lokaler Knotenverschiebung wird durch einen Knotenverschiebungs-Sprung-Tensor dargestellt, siehe hierzu auch (Turon 2006, Kap. 3.2.2)

$$\hat{\boldsymbol{\Delta}} = \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}} \quad . \quad (2.90)$$

Der Knotenverschiebungs-Sprung wird dann wiederum durch übliche Formfunktionen innerhalb eines Elementes interpoliert.

$$\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N} \hat{\boldsymbol{\Delta}} \quad . \quad (2.91)$$

Nun kann die virtuelle Arbeit der Bruchenergie, d.h. der zweite Term in Gleichung 2.87, aufgestellt werden. Dazu muss der lokale Knotenverschiebungs-Sprung durch die globalen Verschiebungen ausgedrückt werden, was durch einsetzen der Formeln Gleichung 2.89 und Gleichung 2.90 in Gleichung 2.91 geschieht:

$$\mathbf{f}_c = \int_{\Gamma_c} \delta \Delta^\top \mathbf{t}_c \, dA = \int_{\Gamma_c} \mathbf{B}_c^\top \mathbf{t}_c \, dA \quad . \quad (2.92)$$

, mit dem kohäsiven B-Operator  $\mathbf{B}_c = \mathbf{NLR}$ . Da Gleichung 2.87 im Allgemeinen nichtlinear ist, muss zur Lösung über das Newton-Verfahren ebenfalls die kohäsive Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_c$  bekannt sein, siehe Gleichung 2.74. Diese lautet folgendermaßen:

$$\mathbf{K}_c = \int_{\Gamma_c} \mathbf{B}_c^\top \frac{\partial \mathbf{t}_c}{\partial \Delta} \mathbf{B}_c \, dA \quad . \quad (2.93)$$

Dieser Teil unterscheidet sich formal nicht für unterschiedliche Elemente, oder Konstitutivgesetze. Daher wird im Folgenden die konkrete Diskretisierung für ein lineares 2D-CZE beschrieben, gefolgt von dem konkreten Konstitutivgesetz, dem PPR-Modell. Dieses legt die konkrete Wahl der Kohäsivspannung  $\mathbf{t}_c$  und der Tangentensteifigkeit  $\frac{\partial \mathbf{t}_c}{\partial \Delta}$  fest.

### Diskretisierung 2D

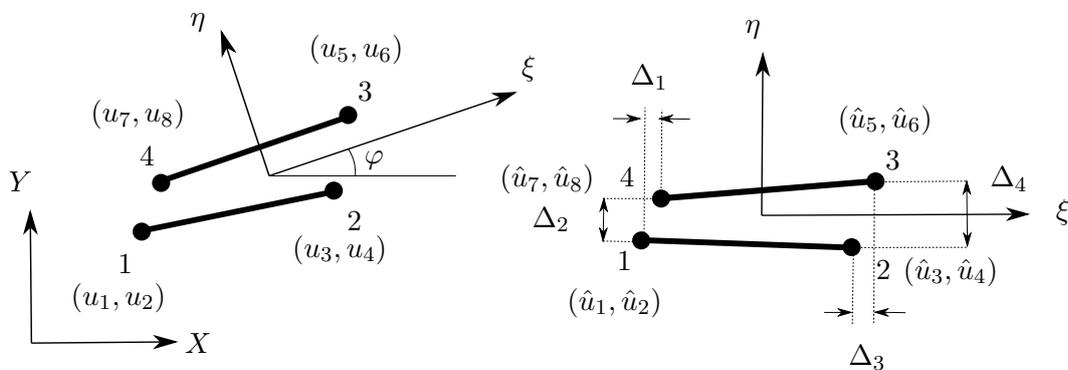


Bild 2.34: Zweidimensionales lineares CZE in globalen Koordinaten (links), sowie in lokalen Koordinaten (rechts).

Ein zweidimensionales CZE mit linearen Ansatzfunktionen hat vier Knoten mit jeweils 2 Freiheitsgraden, siehe Bild 2.34. Insgesamt also acht globalen Knotenverschiebungen, die durch die  $\mathbf{R}$  auf die lokalen Knotenverschiebungen  $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_8$  abgebildet werden. Daher gilt

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix}, \quad (2.94)$$

mit der Koordinatentransformationsmatrix

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.95)$$

Hierbei ist  $\varphi$  der Winkel zwischen lokalen und globalen Koordinaten. Nun werden die lokalen Knotenseparationen in Normal- und Tangentialrichtung durch die lokalen Knotenverschiebungen ausgedrückt. Für dieses Element lässt sich der Verschiebungssprung-Tensor in Gleichung 2.90 durch

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

ausdrücken. Die Separation innerhalb des Elements wird durch die linearen Polynome

$$N_1 = \frac{1 - \xi}{2}, \quad (2.97)$$

$$N_2 = \frac{1 + \xi}{2} \quad (2.98)$$

interpoliert. Mit Hilfe dieser Gleichungen kann der B-Operator in seiner konkreten Form angegeben werden:

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} -CN_1 & -SN_1 & -CN_2 & -SN_2 & CN_2 & SN_2 & CN_1 & SN_1 \\ SN_1 & -CN_1 & SN_2 & -CN_2 & -SN_2 & CN_2 & -SN_1 & CN_1 \end{bmatrix}. \quad (2.99)$$

Dabei stehen  $C$  und  $S$  hier jeweils für  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$ .

## 2.5.2 PPR-Modell

Die Kohäsivspannung  $t_c$  und die Tangentensteifigkeit  $\frac{\partial t_c}{\partial \Delta}$  werden für vier verschiedene Fälle bestimmt: Belastung/Erweichung, Entlastung/Wiederbelastung, Kontakt und vollständiges Versagen. Hierbei wird wie üblich zwischen normalem (Modus I) und tangentialem (Modus II & III) Verhalten unterschieden.

Der Fall Belastung/Erweichung ergibt sich aus dem Potential

$$\Psi(\Delta_n, \Delta_t) = \min(G_n, G_t) + \left[ \Gamma_n \left(1 - \frac{\Delta_n}{\delta_n}\right)^\alpha \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta_n}{\delta_n}\right)^m + \langle G_n - G_t \rangle \right] \times \left[ \Gamma_t \left(1 - \frac{|\Delta_t|}{\delta_t}\right)^\beta \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta_t|}{\delta_t}\right)^n + \langle G_t - G_n \rangle \right]. \quad (2.100)$$

( $\bullet$ ) bezeichnet die Föppl-, oder Macaulay-Klammer. Die Bruchenergien  $G_n$  und  $G_t$  entsprechen den Flächen unter den Rissöffnungs-Kohäsivspannungs-Kurven, siehe Bild 2.30

$$G_n = \int_0^{\delta_n} t_n(\Delta_n, 0) d\Delta_n, \quad (2.101)$$

$$G_t = \int_0^{\delta_t} t_t(\Delta_t, 0) d\Delta_t. \quad (2.102)$$

Die acht internen Parameter  $\Gamma_n, \Gamma_t, m, n, \delta_n, \delta_t, \alpha$  und  $\beta$  lassen sich dabei wie im Folgenden beschrieben aus den über makroskopische Versuche bestimmbar Parameter  $G_n, G_t, \sigma_{max}, \tau_{max}, \alpha, \beta, \lambda_n$  und  $\lambda_t$  gewinnen. Die Energiekonstanten  $\Gamma_n$  und  $\Gamma_t$  beziehen sich auf die Bruchenergien in Modus I und II. Im Falle unterschiedlicher Bruchenergien erhält man

$$\Gamma_n = (-G_n)^{\frac{\langle G_n - G_t \rangle}{(G_n - G_t)}} \left(\frac{\alpha}{m}\right)^m, \quad (2.103)$$

$$\Gamma_t = (-G_t)^{\frac{\langle G_t - G_n \rangle}{(G_t - G_n)}} \left(\frac{\beta}{n}\right)^n. \quad (2.104)$$

Im Falle identischer Bruchenergien vereinfachen sich diese Ausdrücke zu

$$\Gamma_n = -G_n \left(\frac{\alpha}{m}\right)^m, \quad (2.105)$$

$$\Gamma_t = \left(\frac{\beta}{n}\right)^n. \quad (2.106)$$

Die Formparameter  $\alpha$  und  $\beta$  steuern die Art der Erweichung, duktil für Werte  $< 2$ , oder quasi-spröde für Werte  $> 2$ . Die dimensionslosen Exponenten  $m$  und  $n$  erhält man durch Analyse der kritischen Separationen

$$m = \frac{\alpha(\alpha - 1)\lambda_n^2}{(1 - \alpha\lambda_n^2)}, \quad (2.107)$$

$$n = \frac{\beta(\beta - 1)\lambda_t^2}{(1 - \beta\lambda_t^2)}. \quad (2.108)$$

Dabei sind  $\lambda_n$  und  $\lambda_t$  die Anfangssteigungsparameter, die als Verhältnis der kritischen Rissöffnungsweite zur finalen Rissöffnungsweite definiert sind

$$\lambda_n = \frac{\delta_{nc}}{\delta_n}, \quad (2.109)$$

$$\lambda_t = \frac{\delta_{tc}}{\delta_t}. \quad (2.110)$$

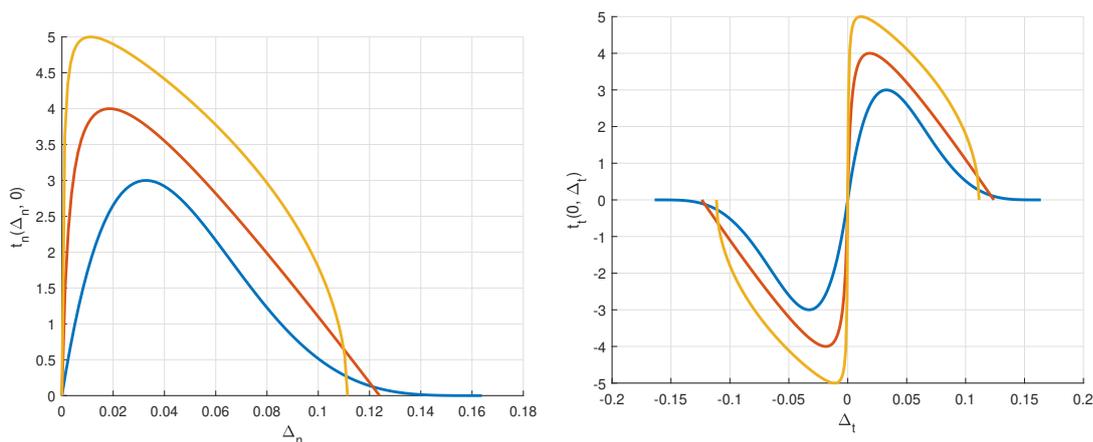
Diese regeln damit das elastische Verhalten des Materials, in einem extrinsischen Modell würden Sie zu Null gesetzt, da nur das Verhalten ab Erreichen der maximalen Spannungen beschrieben wird. Die Möglichkeiten den Verlauf der Rissöffnungs-Kohäsivspannungsbeziehung des PPR-Modells über Parameter zu steuern, werden in Bild 2.35 dargestellt. Hierbei wurden die Tabelle 2.8 angegebenen Parametersätze verwendet. Die hier verwendeten Parameter sind bewusst ohne Einheiten angegeben um die Möglichkeiten darzustellen.

Kurve	$G_n; G_t$	$\sigma_{max}; \tau_{max}$	$\alpha; \beta$	$\lambda_n; \lambda_t$
blau	0,2; 0,2	3; 3	5; 5	0,2; 0,2
rot	0,3; 0,3	4; 4	2; 2	0,15; 0,15
gelb	0,4; 0,4	5; 5	1,5; 1,5	0,1; 0,1

Tabelle 2.8: Verschiedene Parametersätze für das PPR-Modell.

Es wird ersichtlich, dass das PPR-Modell eine große Bandbreite darstellbaren Materialverhaltens aufweist. Eine Kalibrierung des PPR-Modells für den Schichtenverbund sollte damit über einen weiten Bereich an Temperaturen und Frequenzen möglich sein. In Bild 2.36 ist beispielsweise die Anpassung an Probe 1 aus Aragão u. a. (2011, Abb. 4) gezeigt. Es handelt sich hierbei um Modus I - Ergebnisse einer Asphaltmastix bei 23 °C.

Des weiteren kann das Modell um Reibung erweitert werden. Als nächster Schritt sollten die Ergebnisse aus den Untersuchungen des Schichtenverbundes von Wellner und Ascher (2007), Wellner und Hristov (2015), sowie Wellner und Wistuba (2016) aufgenommen werden.



(a) Verhalten in Normalenrichtung (Modus I). (b) Verhalten in Tangentialrichtung (Modus II & III)

Bild 2.35: Rissöffnungs-Kohäsivspannungsverläufe des PPR-Modells mit unterschiedlichen Parametersätzen.

### 2.5.3 Verifikation

Eine Verifikation des PPR-Modells durch Gegenrechnungen in ABAQUS ist nicht direkt möglich, da dieses Modell dort nicht implementiert ist. Allerdings existiert eine Referenzimplementierung für ABAQUS in Park und Paulino (2012) inklusive durchgerechneter Beispiele, darunter welche mit analytischen Lösungen. Die dazugehörigen Eingabedateien sind über [http://paulino.ce.gatech.edu/PPR\\_tutorial.html](http://paulino.ce.gatech.edu/PPR_tutorial.html) frei herunterladbar. Die vorliegende Implementierung in Matlab wurde gegen diese Beispiele verifiziert. Es wurden der in Tabelle 2.9 angegebene Parametersatz verwendet. Dieser unterscheidet sich von dem Park und Paulino (2012, Kap. 4.1) angegebenen Parametersatz. Mutmaßlich wurden dort falsche Anfangssteigungsparameter angegeben.

$G_n; G_t$	$\sigma_{max}; \tau_{max}$	$\alpha; \beta$	$\lambda_n; \lambda_t$
0,1; 0,2	4,0; 3,0	5,0; 1,6	0,1; 0,1

Tabelle 2.9: Parametersatz für das PPR-Modell zur Verifikation.

### Modus I und II Patch-Tests in 2D

Zunächst wurden sogenannte Patch-Tests gerechnet. Ein Patch-Test bezeichnet meist einen Simulationsaufbau mit wenigen Elementen für den eine exakte Lösung bekannt ist. Diese exakten Lösungen wurden mit einer alleinstehenden Implementierung des

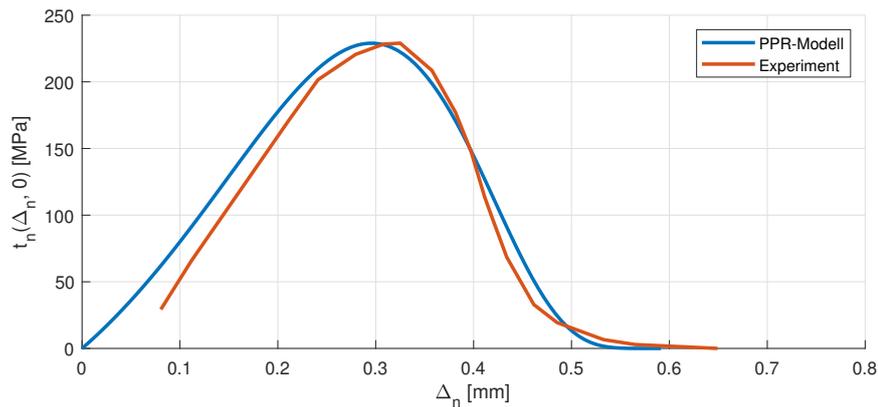
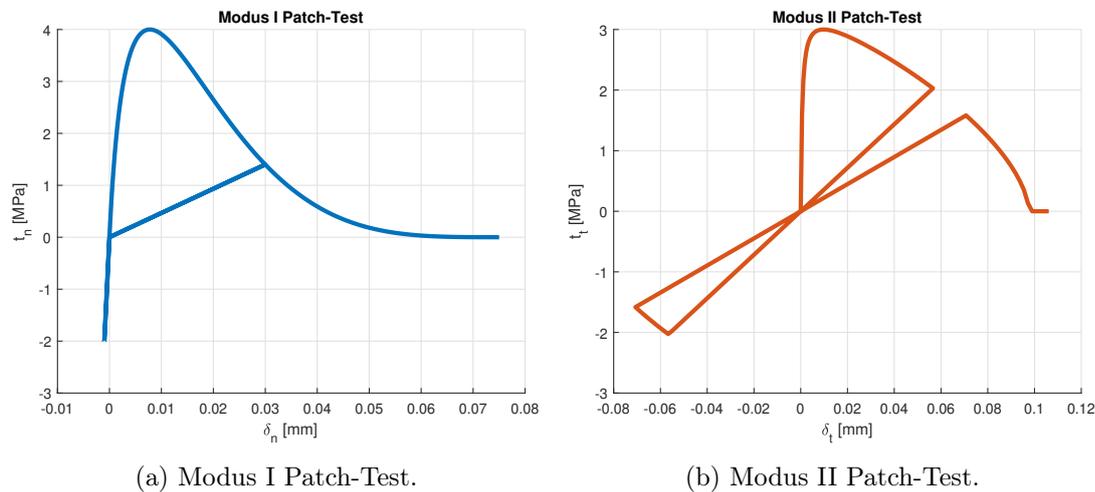


Bild 2.36: Experimentaldaten des Modus I Verhaltens einer Asphaltmastix bei 23 °C von Aragão u. a. (2011) und Reproduktion mit dem PPR-Modell. Die Parameter lauten  $G_n = 65 \text{ Nmm}$ ,  $\sigma_{max} = 229 \text{ N}$ ,  $\alpha = 8$ ,  $\lambda_n = 0.5$ .

PPR-Modells berechnet bei denen die Kohäsivspannung in Abhängigkeit der vorgegebenen Rissöffnung bestimmt wird. Die Implementierung der Kinematik, sowie der Tangentialsteifigkeit entfallen, da es auch keine Diskretisierung gibt. Ebenso muss kein nichtlineares Gleichungssystem per Newton-Verfahren gelöst werden.

Der Modus I Patch-Test verwendet ein lineares Quadrilateral mit der Annahme ebener Spannung (CPS4 in ABAQUS), sowie ein CZE wie beschrieben. Der Modus II Patch-Test hingegen verwendet zwei lineare Dreiecke mit der Annahme ebener Spannung (CPS3 in ABAQUS). Die Ergebnisse dieser FEM Berechnungen sind in Bild 2.37 dargestellt und stimmen qualitativ mit Park und Paulino (2012, Abb. 8) überein.



(a) Modus I Patch-Test.

(b) Modus II Patch-Test.

Bild 2.37: Rissöffnungs-Kohäsivspannungsverläufe des PPR-Modells für die beiden Patch-Tests aus Park und Paulino (2012).

## 2.5.4 Lineares Konstitutivgesetz

Zusätzlich zu dem bereits beschriebenen nichtlinearen PPR-Modell erschien es im Projektverlauf sinnvoll, auch ein vereinfachtes lineares Konstitutivgesetz zu implementieren. Aufgrund der Linearität sollte sich dieses im Gegensatz zu nichtlinearen Modellen für die Benutzung mit FSFEM eignen.

Das grundsätzliche Vorgehen besteht darin die Tangentensteifigkeit  $\frac{\partial \mathbf{t}_c}{\partial \Delta}$  konstant zu lassen

$$\frac{\partial \mathbf{t}_c}{\partial \Delta} = \begin{bmatrix} k_{t1} & 0 & 0 \\ 0 & k_{t2} & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}, \quad (2.111)$$

wobei es zweckmäßig ist, die tangentialen Komponenten der Tangentensteifigkeit identisch

$$k_{t1} = k_{t2} = k_t \quad (2.112)$$

zu wählen, solange man davon ausgehen kann, dass das Verhalten transversal isotrop ist. Als Nachteil eines linearen Konstitutivgesetzes kann angesehen werden, dass in Normalenrichtung kein Unterschied zwischen Zug- und Druck gemacht werden kann. Allgemein ist üblich, dass Konstitutivgesetze für Grenzflächen auf Druck sehr steif reagieren, so dass nicht das Interface-Element, sondern die umgebenden Kontinuums-elemente deformieren. Auf Druck sollte also eine sogenannte „Penalty“-Steifigkeit gewählt werden. Als Faustregel sollte diese eine Größenordnung über der Steifigkeit der Kontinuums-elemente liegen. In Bild 2.38 ist ein solches Verhalten dargestellt. Für das Verhalten auf Zug heißt das umgekehrt, dass derart parametrisierte Elemente kein Abheben der Schichten berücksichtigen können.

Ein Problem stellt derzeit noch dar, dass je nach Wahl der Randbedingungen eine tangential Belastung der Elemente eine nichtlineare Systemantwort hervorruft, ergo mehrerer Newton-Iterationen bedarf. Aus Performance-Gründen ist das nicht optimal. Warum die Verwendung einer linearen Tangente ein solches Verhalten provozieren kann, bedarf weiterer Untersuchungen.

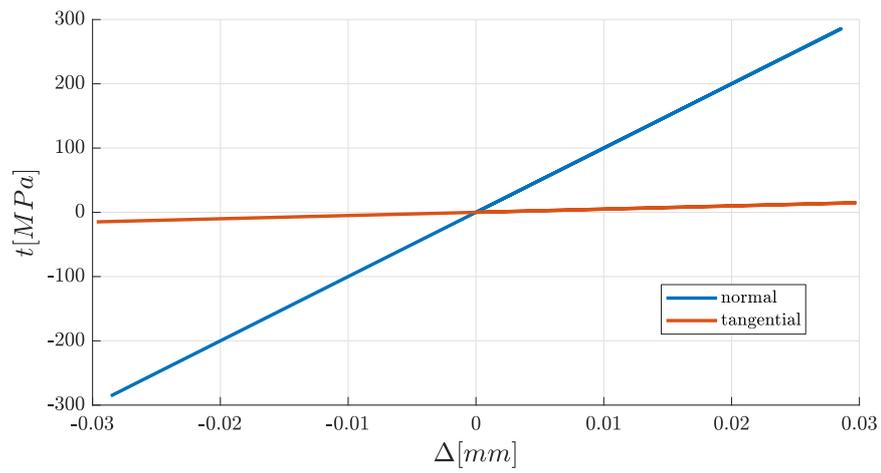


Bild 2.38: Lineares Spannungs-Rissöffnungs-Verhalten eines Interface-Elements mit  $k_n = 10000$  und  $k_t = 500 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}}$ .

## 2.6 AP 260: Rissausbreitung und Abschätzung der Lebensdauer

Grundsätzlich kann nun mit Hilfe des in Abschnitt 2.5 beschriebenen CZE die Rissausbreitung simuliert werden, wie auch bereits in Oeser, Wang, Liu, Wistuba u. a. (2015) dargestellt. Hierfür sind allerdings zusätzliche Tests zur Kalibrierung und Verifikation notwendig. Zum einen muss die Heterogenität des Materials Asphalt berücksichtigt werden, die dafür sorgt, dass lokal quasi nie eine reine Belastung in Modus I, oder Modus II & III vorliegt. Grundsätzlich treten somit auf der für das Bruchverhalten relevanten Skala immer alle drei Bruchmoden, siehe Bild 2.31, gleichzeitig auf. Im Gegensatz zu den Untersuchungen von Wellner und Hristov (2015) sind daher für die Kalibrierung des CZE auch Modus I Tests notwendig. Beispielsweise verwenden Aragão u. a. (2011) ein bilineares CZE zur Modellierung des Bruchverhaltens von Asphalt unter uniaxialem Zug. Die Kalibrierung des CZE erfolgte an einer speziellen Vorrichtung für Bruchversuche an Asphaltmastixproben. Die Mastix enthielt ein Größtkorn von  $280\ \mu\text{m}$ . Dort wurden allerdings wiederum nur Parameter für den Modus I Bruch bestimmt, siehe auch Bild 2.36. Es scheint also notwendig, zusätzliche Versuche zur kompletten Charakterisierung eines CZE für das tangentielle und normale Verhalten durchzuführen.

Die Verifikation sollte dann an komplexeren Strukturtests wie dem Spaltzug-Schwellversuch gemäß AL-Asphalt 09, oder 3-Punkt-Halbzylinder-Biegeversuch in Anlehnung an DIN EN 12697-44 erfolgen. Auch hier muss die dreidimensionale Mikrostruktur berücksichtigt werden. Das Ziel sollte es sein, den in Wimmer u. a. (2014) angedachten Weg des Vergleichs von globalen Kraft-Verschiebungsdaten einer Prüfmaschine, gekoppelt mit Messungen des lokalen Dehnfeldes mit FEM Ergebnissen weiterzugehen, siehe Bild 2.39.

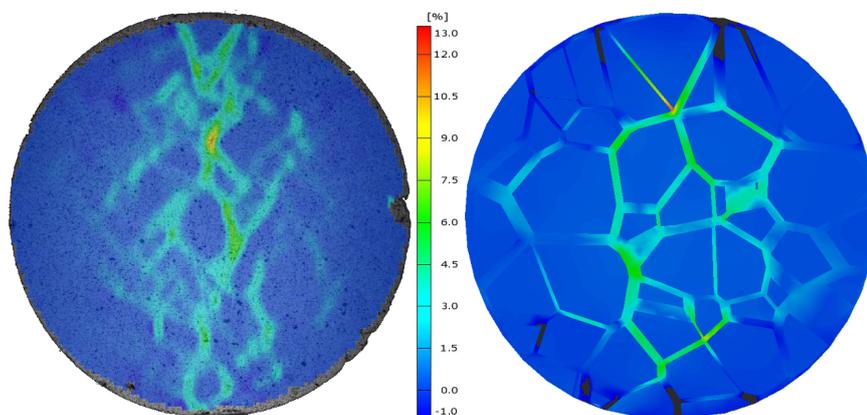


Bild 2.39: Darstellung des Dehnungsfeldes in Experiment (links) und FE-Simulation (rechts). Dargestellt sind die Horizontaldehnungen in einem Probekörper aus MA 11 S im indirekten Spaltzugversuch. Das Dehnfeld wurde im Experiment mit einem digitalen Dehnungsmesssystem **Aramis 4M** aufgenommen (Wimmer u. a. 2014). Die Simulation zeigt eine nicht repräsentative Asphaltstruktur auf Basis einer Voronoi-Tessellierung. Es wurde rein elastisches Materialverhalten modelliert.

### 3 AP 300: Optimierung des probabilistischen Verfahrens

Die Dimensionierung von Asphaltstraßenbefestigungen bzw. die Prognose deren verbleibende Nutzungsdauer basiert auf Berechnungen von Spannungen und Verformungen innerhalb der Struktur. Die Verformungen an den für die Dimensionierung bzw. Prognose maßgebenden Nachweisstellen werden anschließend mittels einer Ermüdungsfunktion und einer Schadhypothese bewertet.

Bisher werden die Dehnungen für alle Belastungszustände aus Temperatur und Verkehr und, sofern die probabilistische Verfahrensweise zur Anwendung kommt, auch für jede Ausprägungsform der Steifigkeitsmodul-Temperaturfunktion (Klassenfunktionen) berechnet. Bei 22 Achslastklassen, 156 Temperaturbedingungen und z.B. 5 verschiedene Klassenfunktionen für die Steifigkeitsmodul-Temperaturfunktion ergeben sich 17.160 unterschiedliche Beanspruchungszustände, die im Vorfeld einer Bewertung mehr oder weniger aufwendig durch Zuhilfenahme der Mehrschichten-Theorie oder der Finite-Elemente-Methode berechnet werden müssen. Insbesondere die Anwendung der Finite-Elemente-Methode führt zum Teil zu erheblichen Verlängerungen der Berechnungszeiten.

Für die Optimierung der Leistungsfähigkeit einer solchen Verfahrensweise bietet sich an, die Anzahl der sehr aufwendig numerisch zu berechnenden Beanspruchungszustände zu reduzieren und durch rein analytische Verfahrensweisen zu ersetzen. Im Rahmen dieses Arbeitspaketes soll eine solche Optimierung durch zwei wesentliche Modifikationen des Berechnungsalgorithmus erreicht werden:

1. Beschreibung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen Temperatur (bzw. Steifigkeitsmodul) und Dehnung im Nachweispunkt, um damit die Anzahl der Belastungszustände (Temperaturbedingungen), die numerisch analysiert werden, zu reduzieren.
2. Beschreibung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen Steifigkeitsmodul und Dehnung im Nachweispunkt, bezogen auf einen definierten Temperaturzustand, um damit die Anzahl der Klassenfunktionen zur Berücksichtigung der Variabilität der Steifigkeitsmoduln, die numerisch analysiert werden, zu reduzieren bzw. um damit die Anzahl der Klassenfunktionen und somit auch die Güte des Ergebnisses ohne signifikanten Mehraufwand bei der Berechnungsdauer deutlich zu erhöhen.

3. Beschreibung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen Asphaltpaketdicke und Dehnung im Nachweispunkt, bezogen auf einen definierten Temperaturzustand, um damit die Anzahl der Klassenfunktionen zur Berücksichtigung der Variabilität der Asphaltpaketdicke, die numerisch analysiert werden, zu reduzieren bzw. um damit die Anzahl der Klassenfunktionen und somit auch die Güte des Ergebnisses ohne signifikanten Mehraufwand bei der Berechnungsdauer deutlich zu erhöhen.

## 3.1 Regressionsanalyse

### 3.1.1 Einfache Lineare Regression

Die einfache lineare Regressionsanalyse sucht nach einer linearen Gleichung, die den Zusammenhang zwischen der unabhängigen Variable  $x$  und der abhängigen Variable  $y$  beschreibt.

$$y = a \cdot x + b \quad (3.1)$$

$y$  abhängige Variable

$x$  unabhängige Variable

$a, b$  Modellparameter

Die Modellparameter  $a$  und  $b$  lassen sich aus einer vorhandenen Stichprobe mit den Elementen  $x_i$  und  $y_i$  (mit  $i = 1 \dots n$ ) durch Anwendung der Gleichung 3.2 und Gleichung 3.3 direkt bestimmen.

$$a = \frac{\sum_i ((x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}))}{\sum_i ((x_i - \bar{x})^2)} \quad (3.2)$$

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x} \quad (3.3)$$

$\bar{y}$  Mittelwert der Stichprobenelemente  $y_i$  der abhängigen Variable  $y$

$\bar{x}$  Mittelwert der Stichprobenelemente  $x_i$  der unabhängigen Variable  $x$

$a, b$  Modellparameter

Der Stichprobenmittelwert der unabhängigen Variablen  $x$  lässt sich nach Gleichung 3.4 berechnen. Der Stichprobenmittelwert der abhängigen Variable  $y$  wird analog dazu bestimmt.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3.4)$$

$\bar{x}$  Mittelwert der Stichprobenelemente  $x_i$  der unabhängigen Variable  $x$

$n$  Stichprobenumfang

### 3.1.2 Multiple Lineare Regression

Ist die Ausprägung der Variable  $y$  von mehreren unabhängigen Variablen  $x_j$  abhängig, wird die abhängige Variable  $y$  als eine Linearkombination linearer Funktionen der unabhängigen Variablen  $x_j$  modelliert. Man spricht dann von einer multiplen linearen Regression. Eine solche Gleichung hat die Form:

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^k a_j \cdot x_j \quad (3.5)$$

$a_j$  Modellparameter

$x_j$  unabhängige (erklärende) Variable

$k$  Anzahl der unabhängigen (erklärenden) Variablen

Liegt eine Stichprobe mit Daten in der Form  $(x_{ij}, y_i)$  mit  $i = 1 \dots n$  und  $j = 1 \dots k$  vor, ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 \cdot x_{11} + a_2 \cdot x_{12} \cdots + a_k \cdot x_{1k} \\ y_2 &= a_0 + a_1 \cdot x_{21} + a_2 \cdot x_{22} \cdots + a_k \cdot x_{2k} \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1 \cdot x_{n1} + a_2 \cdot x_{n2} \cdots + a_k \cdot x_{nk} \end{aligned} \quad (3.6)$$

bzw. in vektorieller Schreibweise:

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{X} \quad (3.7)$$

mit

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Für die Schätzung der Modellparameter  $(a_0, \dots, a_k)$  gilt:

Mit Hilfe der Matrix  $\mathbf{X}$  und dem Vektor  $\mathbf{y}$  kann man dann den Vektor  $\mathbf{a}$  der Modellparameter schätzen:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{y} \quad (3.9)$$

### 3.1.3 Polynomregression

Bei der Polynomregression wird eine Gleichung der Form

$$y = \sum_{j=0}^k a_j \cdot x^j \quad (3.10)$$

$a_j$  Modellparameter

$k$  Grad des Polynoms

zur Beschreibung eines nichtlinearen Zusammenhangs zwischen der unabhängigen Variable  $x$  und der abhängigen Variabel  $y$  herangezogen. Die Höhe des Grades des zu verwendenden Polynoms wird dabei durch die Komplexität des abzubildenden Zusammenhangs bestimmt.

Werden die unterschiedlichen Potenzen von  $x$  als eigenständig erklärende Variablen angesehen, kann die Polynomregression als spezieller Fall der multiplen linearen Regression betrachtet werden. Dann gilt:  $x_1 = x, x_2 = x^2, x_3 = x^3, \dots, x_j = x^j$

Bei Vorliegen einer Stichprobe  $(x_i, y_i)$  mit  $i = 1 \dots n$  entspricht der Lösungsansatz für die Bestimmung der Modellparameter  $a_j$  der Gleichung 3.9 mit:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^k \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

### 3.1.4 Exponentielle Regression

Bei der exponentiellen Regression wird der Zusammenhang zwischen einer unabhängigen Variable  $x$  und einer abhängigen Variable  $y$  durch eine Exponentialfunktion der Form

$$y = a_1 \cdot e^{a_2 \cdot x} \quad (3.12)$$

$a_1, a_2$  Modellparameter

beschrieben.

Zur Bestimmung der Modellparameter wird die Gleichung 3.12 zunächst in eine Geradengleichung (Gleichung 3.14) umgewandelt und anschließend werden deren Modellparameter  $a_2$  und  $a_1^*$  in Anlehnung an die Gleichung 3.2 und Gleichung 3.3 berechnet.

$$\ln(y) = \ln(a_1) + a_2 \cdot x \quad (3.13)$$

mit  $\ln(y) = y^*$  und  $\ln(a_1) = a_1^*$  folgt:

$$y^* = a_2 \cdot x + a_1^* \quad (3.14)$$

### 3.1.5 Potentielle Regression

Entspricht der Zusammenhang zwischen der unabhängigen Variablen  $x$  und der abhängigen Variable  $y$  einer Potenzfunktion der Form,

$$y = a_1 \cdot x^{a_2} \quad (3.15)$$

$a_1, a_2$  Modellparameter

wird bei der Bestimmung der Modellparameter nach gleicher Vorgehensweise verfahren wie bei der exponentiellen Regression.

Für die Linearisierung gilt:

$$\ln(y) = \ln(a_1) + a_2 \cdot \ln(x) \quad (3.16)$$

mit  $\ln(y) = y^*$ ,  $\ln(x) = x^*$  und  $\ln(a_1) = a_1^*$  folgt:

$$y^* = a_2 \cdot x^* + a_1^* \quad (3.17)$$

## 3.2 Verringerung der numerisch zu berücksichtigenden Belastungszustände

In den Verfahrensweisen zur rechnerischen Dimensionierung von Asphaltstraßenbefestigungen (RDO Asphalt) (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009), wie auch in den rechnerischen Verfahrensweisen zur Bewertung der strukturellen Substanz von Asphaltstraßenbefestigungen (RSO Asphalt) (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018) werden verschiedene berechnungsrelevante Belastungszustände berücksichtigt. Ein Belastungszustand setzt sich hierbei aus einer definierten Achslast und einem Temperaturzustand in der Asphaltbefestigung zusammen.

In der derzeit aktuellen Entwurfsfassung der RSO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018) sowie der derzeit in der Überarbeitung befindlichen Fassung der RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2021) werden die im Laufe der Nutzungszeit einer Asphaltstraßenbefestigung auf diese wirkenden thermischen Bedingungen durch 156 Temperaturprofile abgebildet. Diese setzen sich aus 12 normierten charakteristischen Temperaturprofilen, überlagert mit 13 Oberflächentemperaturklassen, zusammen. Die Verkehrslasten werden durch ein Achslastkollektiv berücksichtigt. Ein solches Achslastkollektiv setzt sich dabei aus 22 unterschiedlichen Achslastklassen und entsprechend zugeordneten Auftretenshäufigkeiten zusammen. Aus den 22 Achslastklassen sowie den 156 Temperaturprofilen ergeben sich somit 3.432 Belastungszustände, für die die Beanspruchungen in der Befestigung ermittelt werden müssen.

### 3.2.1 Achslastklassen

Die Berechnungsmethoden der aktuellen RDO Asphalt bzw. der RSO Asphalt basieren derzeit auf linear elastischen Stoffmodellen. Es gilt demnach:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{|E|} \quad (3.18)$$

$\varepsilon$  Dehnung [-]

$\sigma$  Spannung [N/mm<sup>2</sup>]

$|E|$  Steifigkeitsmodul [N/mm<sup>2</sup>]

Die Dehnungen sind direkt proportional zu den Spannungen und damit auch direkt proportional zu den eingetragenen Lasten. Für die Achslast bedeutet das, dass die numerische Berechnung der Beanspruchungen auf eine Achslast/Achslastklasse beschränkt werden kann und die dimensionierungsrelevanten Beanspruchungen der übrigen Achslasten daraus analytisch abgeleitet werden können.

### 3.2.2 Temperaturbedingungen

Für jeden der 156 Temperaturzustände, kombiniert mit den 22 Achslastklassen, wird nach derzeitiger Verfahrensweise jeweils eine vollständige numerische Berechnung des sich daraus ergebenden Beanspruchungszustandes durchgeführt. Zur Optimierung der Berechnungsdauer ist es zielführend, einen Teil der bisher numerisch ermittelten Beanspruchungen, im für die Nachweisführung tatsächlich relevanten Bereich, durch geeignete Funktionen rein analytisch zu berechnen. Grundlage einer solchen rein analytischen Lösung können entsprechende Abhängigkeiten zwischen der gesuchten Zielgröße (= abhängige Variable) – in diesem Fall die radiale Dehnung im Nachweispunkt – und einer oder mehrerer einflussnehmender Größen (= unabhängige Variablen) sein.

#### Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt

Die Dehnung im Nachweispunkt einer Asphaltbefestigung ist abhängig vom Steifigkeitsprofil (vertikaler Verlauf der Steifigkeitsmoduln entlang der Lasteintragsachse) und somit vom Temperaturprofil (vertikaler Verlauf der Steifigkeitsmoduln entlang der Lasteintragsachse) in der Struktur. Je höher die Temperaturen in der Befestigung sind umso geringer wird die Steifigkeit der Asphalt-Konstruktionsschichten und desto größer werden, bei gleicher Verkehrslast, die Verformungen in der Struktur.

Dieser Zusammenhang kann für jeden normierten Temperaturverlauf (ncT) getrennt sehr gut durch ein Polynom 3. Grades beschrieben werden (Bild 3.1). Für die im Rahmen dieses Teilprojektes analysierten Berechnungsergebnisse und denen zugrunde liegenden Rechenmethoden und Materialmodellen reicht ein Polynom 3. Grades zur Anpassung aus. Werden künftig andere Methoden und/oder Modelle in die rechnerischen Verfahrenswesen der RDO Asphalt bzw. der RSO Asphalt eingebunden, kann es ggf. notwendig werden, den Grad des Polynoms zu erhöhen um eine bessere Anpassung zu erreichen.

Die Anpassungsgüte verschlechtert sich geringfügig, wenn ein ncT-übergreifender Zusammenhang hergestellt wird (Bild 3.2). Dafür reduziert sich bei Anwendung eines ncT-unabhängigen Zusammenhangs der Aufwand für die Regressionsanalyse. Ggf. ermöglicht dies auch eine Reduktion der numerisch zu betrachtenden Temperaturbedingungen im Vergleich zum ncT-abhängigen Ansatz.

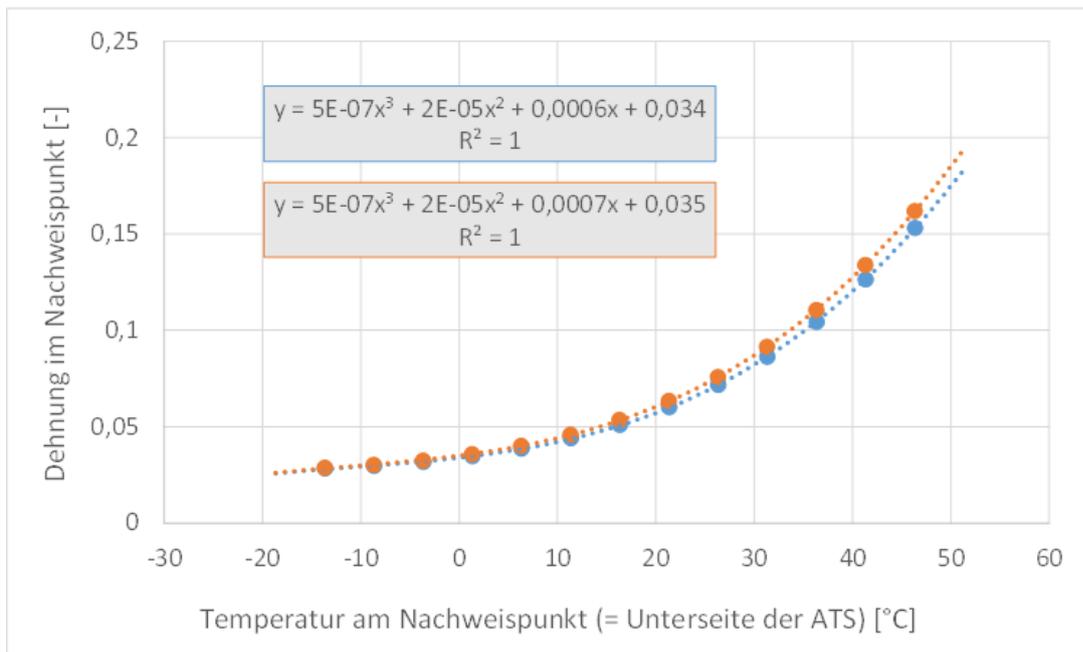


Bild 3.1: Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt für zwei beispielhaft ausgewählte ncTs.

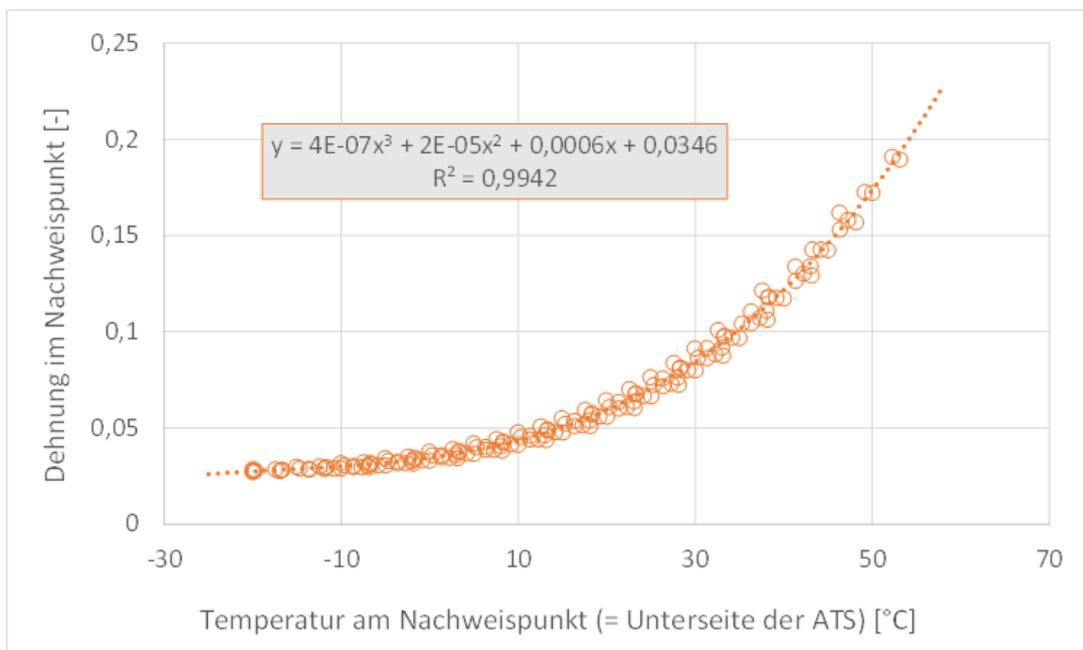


Bild 3.2: Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt unabhängig vom ncT.

## Zusammenhang zwischen Steifigkeitsmodul und Dehnung im Nachweispunkt

Anstelle der Temperatur am Nachweispunkt kann alternativ auch die Asphaltsteifigkeit im Bereich des Nachweispunktes als unabhängige Variable herangezogen werden.

In den Bild 3.3, Bild 3.4 und Bild 3.5 ist jedoch zu erkennen, dass die Anpassungsgüte insbesondere bei Nutzung  $ncT$ -abhängiger Polynome 3. Grades etwas schlechter ist, als die  $ncT$ -abhängigen Funktionen für den Zusammenhang zwischen Temperatur im Nachweispunkt und Dehnung. Um hier die gleiche Anpassungsgüte zu erzeugen, müssen höhergradigere Polynome verwendet werden (Bild 3.6).

Aus diesem Grund wird dieser Zusammenhang nicht weiter betrachtet. Zur Reduktion der numerisch zu berücksichtigenden Temperaturzustände wird nachfolgend auf den Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt zurückgegriffen.

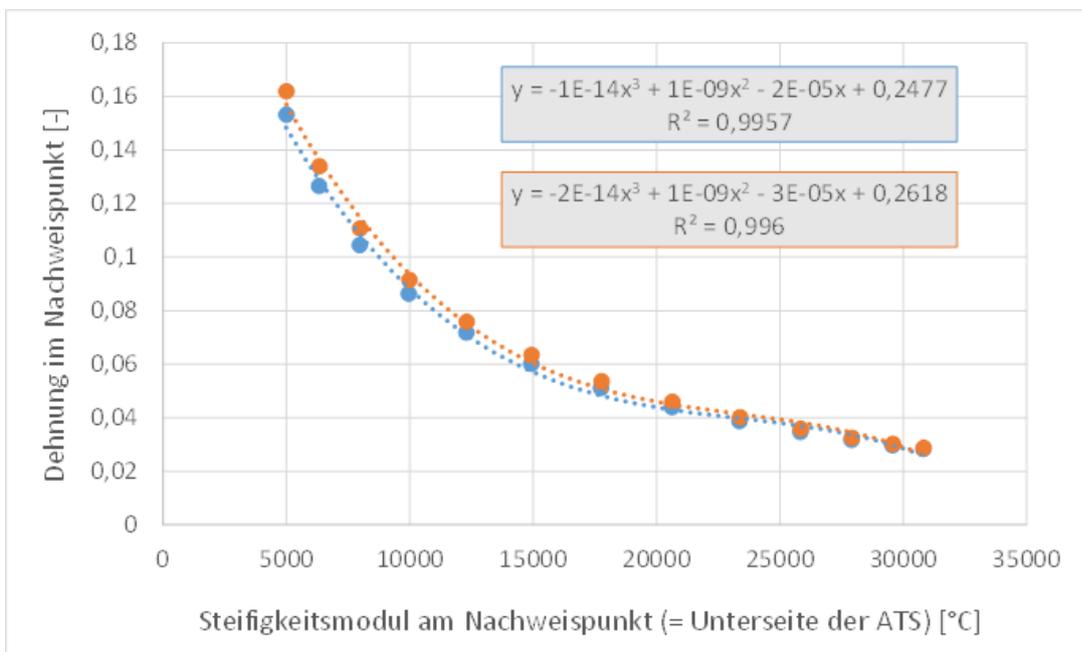


Bild 3.3: Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt für zwei beispielhaft ausgewählte  $ncTs$  – Anpassung durch Polynomfunktion 3. Grades.

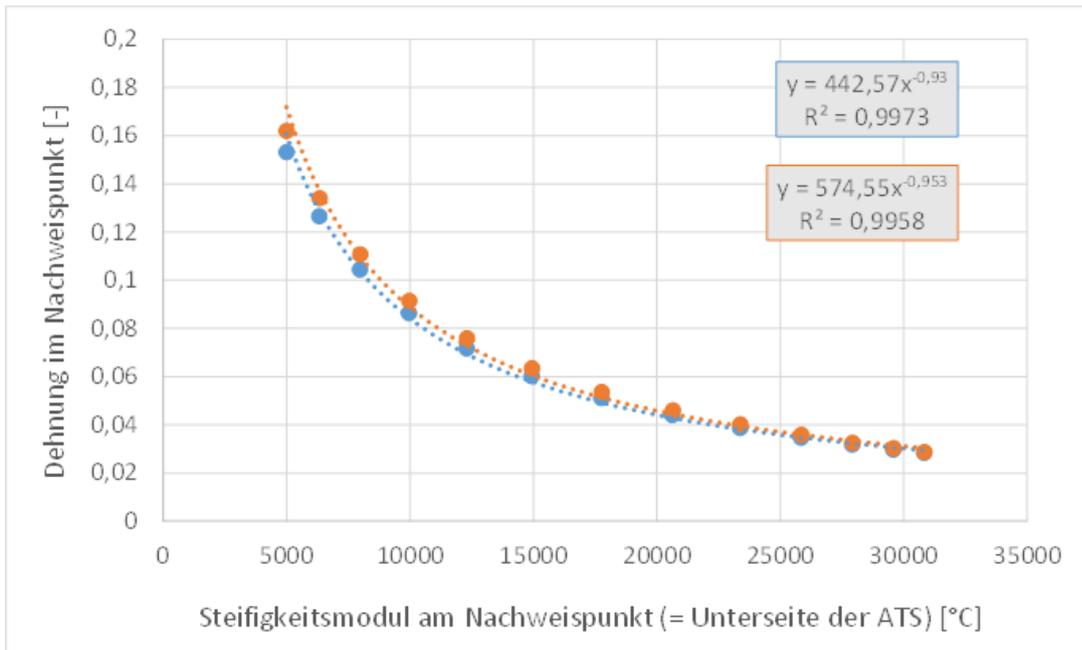


Bild 3.4: Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt für zwei beispielhaft ausgewählte ncTs – Anpassung durch Potenzfunktion.

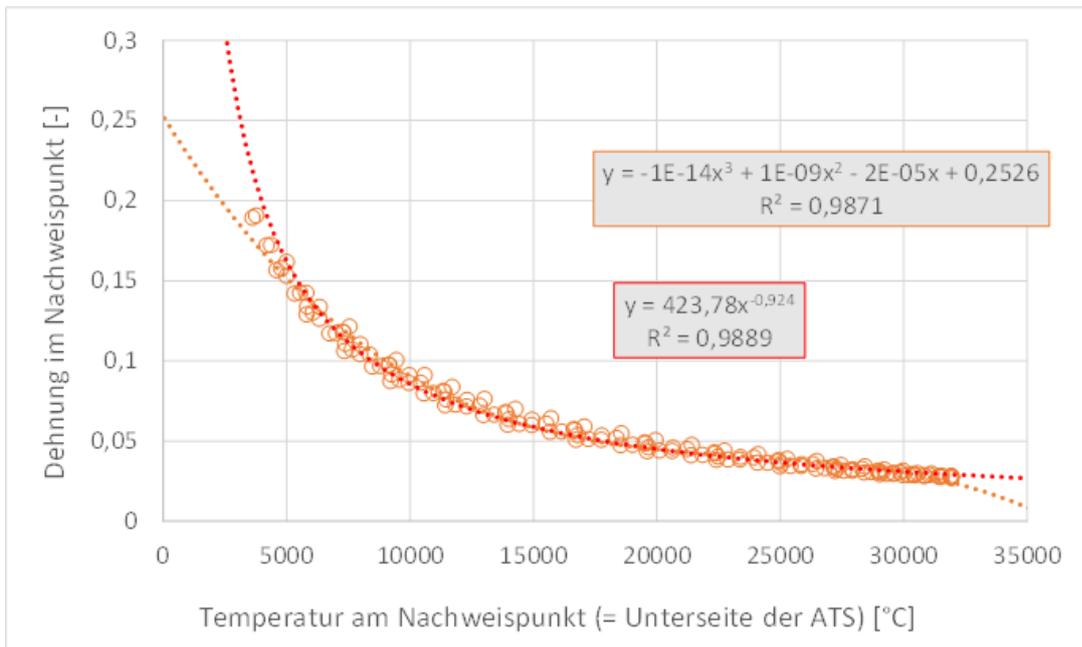


Bild 3.5: Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt unabhängig vom ncT.

## **Anwendungsbeispiel**

Das Optimierungspotential für die Dimensionierungs- und Prognoseverfahrensweise hängt davon ab, wie viele Temperaturzustände für die Bestimmung eines solchen funktionalen Zusammenhangs notwendig werden und wie groß der daraus resultierende Modellfehler wird.

Um dies abzuschätzen, wurden für vier unterschiedliche Asphalttragschichten Beispielrechnungen durchgeführt. Die Materialeigenschaften und Materialkennwerte der vier Asphalttragschichten sind aus Bild 3.7 bis Bild 3.10 zu entnehmen.

Die Materialeigenschaften der Asphaltdeck- und der Asphaltbinderschicht entsprechen denen der Kalibrierasphalte der jeweiligen Schicht.

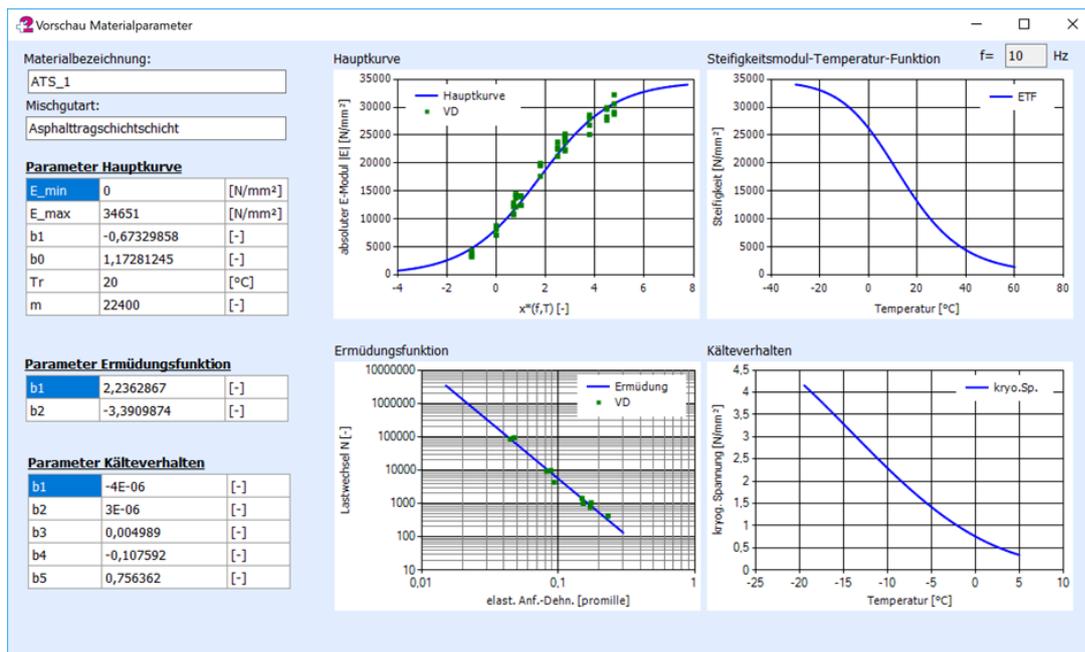


Bild 3.7: Materialeigenschaften für die Asphalttragschichtvariante ATS1.

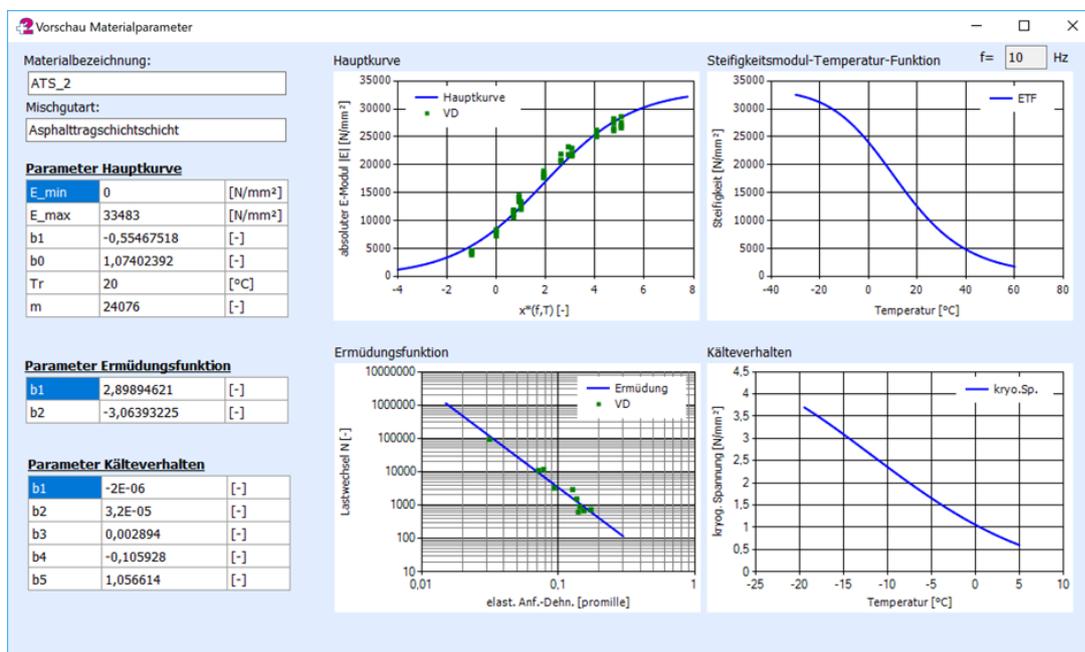


Bild 3.8: Materialeigenschaften für die Asphalttragschichtvariante ATS2.

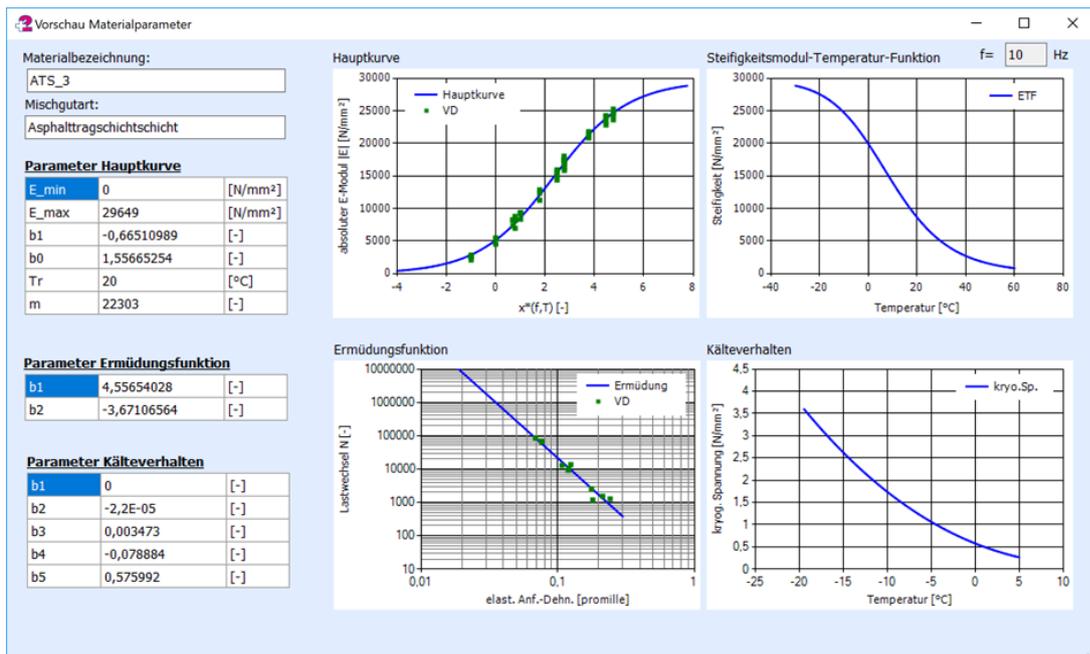


Bild 3.9: Materialeigenschaften für die Asphalttragschichtvariante ATS3.

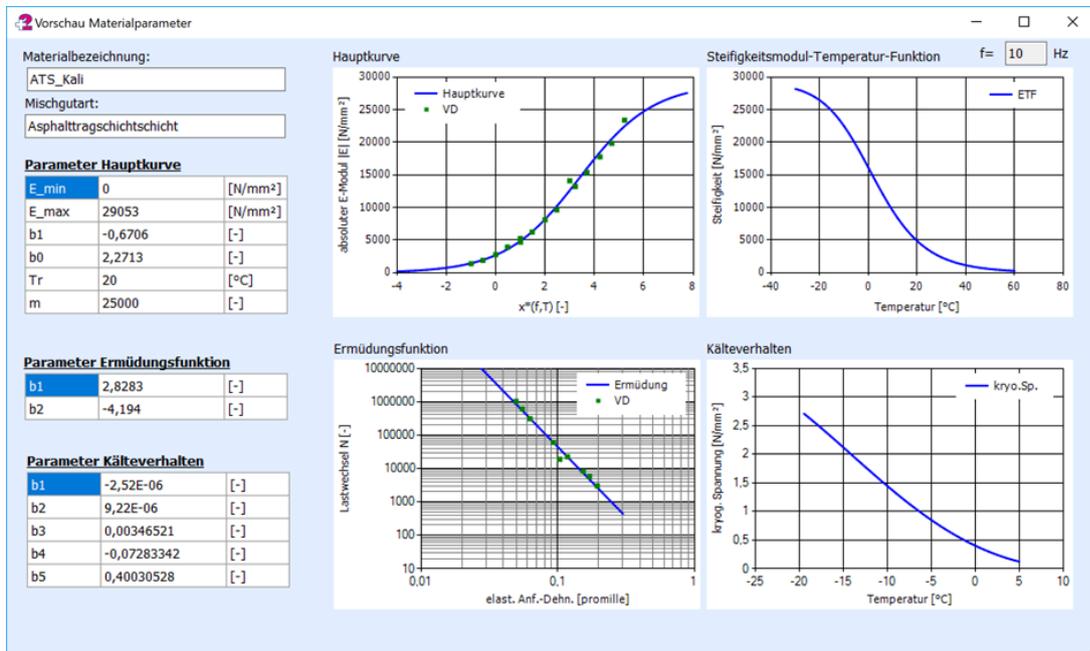


Bild 3.10: Materialeigenschaften für die Asphalttragschichtvariante ATS4.

Für die Beispielrechnungen wurde die in Tabelle 3.1 angegebene Bauweise untersucht. Als Belastungssituation wurde von einer 10t-Achslastklasse, 12 normierten Temperaturverläufen und 13 Oberflächentemperaturklassen ausgegangen. Darüber hinaus wurde die Variabilität der Steifigkeitsmoduln der Asphalttragschicht sowie die Variabilität der Asphaltpaketdicke mit berücksichtigt und durch jeweils drei Klassenfunktionen für die Steifigkeitsmodul-Temperaturfunktion (Bild 3.11) sowie für die Asphaltpaketdicke (Bild 3.12) modelliert. Die Variabilität der Steifigkeitsmoduln der Asphaltdeckschicht sowie der Asphaltbinderschicht wurden vernachlässigt.

Schichttyp	Schichtdicke [cm]
ADS	4
ABi	8
ATS	22
FSS	46

Tabelle 3.1: Beispielhafte Bauweise.

Für jede dieser 9 Konstruktionsvarianten (3 Steifigkeitsklassen  $\times$  3 Dickenklassen) wurden 6 unterschiedliche Regressionsvarianten untersucht (Tabelle 3.2). Diese unterscheiden sich hinsichtlich der für die Regression verwendeten Oberflächentemperaturklassen (Anzahl und/oder Lage der Stützstellen). Außerdem wurden ncT-abhängige sowie ncT-unabhängige Regressionsansätze analysiert. In allen Varianten wurde der Zusammenhang durch ein Polynom 3. Grades approximiert (siehe beispielhaft Bild 3.13).

Variante	ncT-abhängige Funktionen	Anzahl TFO	TFO für Regression	Anzahl Funktionen pro Konstruktionsvariante
R1	ja	7 (13)	-12,5/-2,5/7,5/17,5/27,5/37,5/47,5	12
R2	ja	4 (13)	-12,5/7,5/27,5/47,5	12
R3	ja	4 (13)	-2,5/12,5/37,5/47,5	12
R4	nein	7 (13)	-12,5/-2,5/7,5/17,5/27,5/37,5/47,5	1
R5	nein	4 (13)	-12,5/7,5/27,5/47,5	1
R6	nein	4 (13)	-2,5/12,5/37,5/47,5	1

Tabelle 3.2: Randbedingungen der untersuchten Regressionsvarianten.

Mittels der Regressionsansätze wurden für die übrigen Temperaturzustände, die nicht numerisch behandelt wurden, die zugehörigen radialen Dehnungen im Nachweispunkt analytisch bestimmt.

Die so numerisch und analytisch ermittelten Dehnungen wurden im letzten Schritt in Ermüdungslastwechselzahlen umgerechnet und mittels der Schadenshypothese von

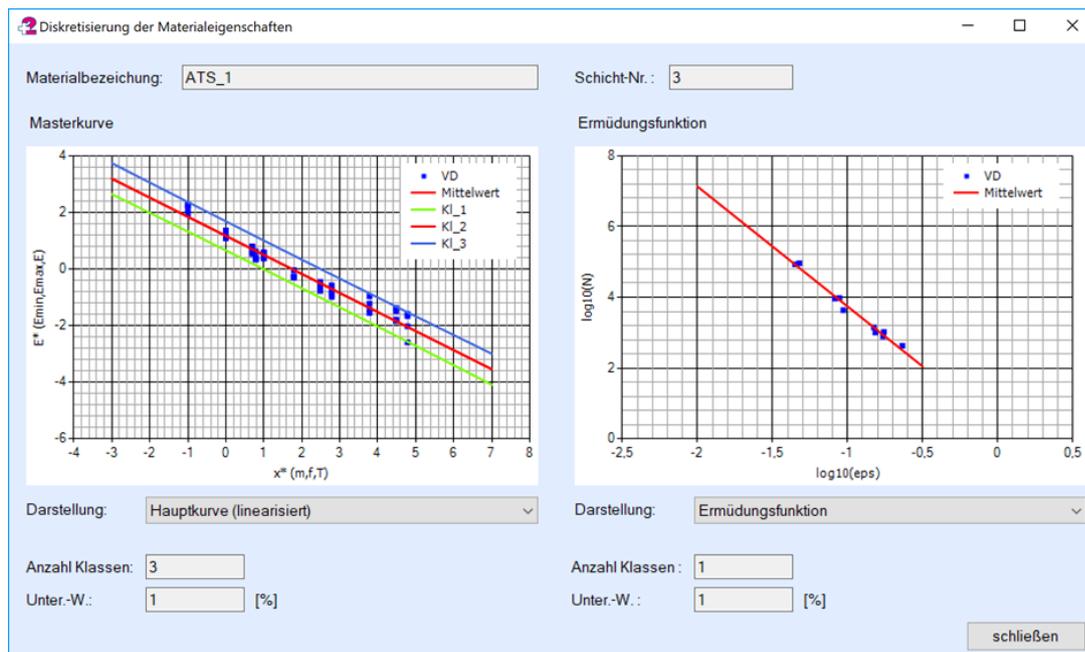


Bild 3.11: Klassenfunktionen zur Beschreibung der Variabilität der Steifigkeitsmoduln (beispielhaft für die ATS1).

Miner (1945) bewertet. Die aus den Schadenssummen resultierenden jährlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten sind beispielhaft für die ATS4 in Tabelle 3.3 dargestellt.

Fett gedruckt sind dabei jene Jahre in denen sich die berechneten Ausfallwahrscheinlichkeiten zwischen der status-quo-Variante (= Referenzvariante = Ausfallwahrscheinlichkeit basiert nur auf numerisch ermittelten Dehnungen) und den Regressionsvarianten unterscheiden. Als Gütemaß für die Übereinstimmung der Zeitverläufe der Ausfallwahrscheinlichkeiten  $PD(t)$  werden der Korrelationskoeffizient  $R$  sowie die Fläche unterhalb der Ganglinie der Ausfallwahrscheinlichkeit  $\sum PD(t)$  herangezogen (Tabelle 3.3).

Zusätzlich zu den Ganglinien der Ausfallwahrscheinlichkeiten wurden auch die Schadenssummen am Ende der Nutzungsdauer getrennt für jede der neun untersuchten Konstruktionsvarianten analysiert und als relativer Unterschied zwischen der Referenzvariante und den Regressionsvarianten ausgegeben (siehe Tabelle 3.4).

In Bild 3.14 bis Bild 3.16 sind zusammenfassend die Ergebnisse dieser Untersuchungen graphisch dargestellt.

Wie zu erwarten war, zeigt die Auswertung der Berechnungen, dass bei Anwendung ncT-unabhängiger Regressionsfunktionen zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Temperatur im Nachweispunkt und Dehnung im Nachweispunkt, deutlich größere Unterschiede im Vergleich zur rein numerische Lösung zu verzeichnen sind, als bei

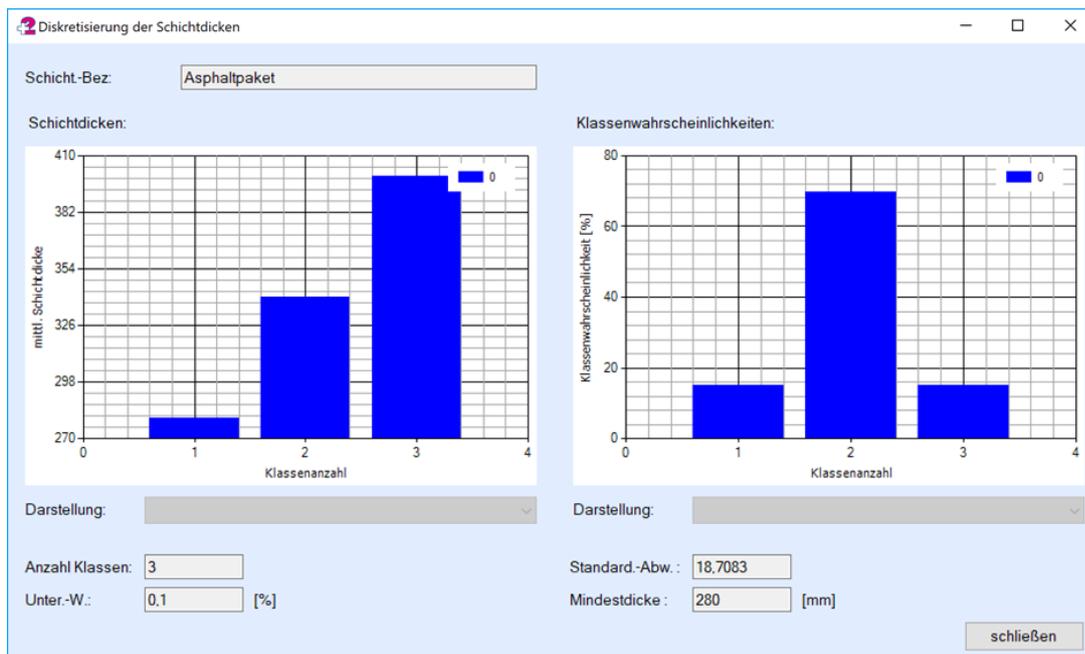


Bild 3.12: Dickenklassen zur Beschreibung der Variabilität der Asphaltpaketticken.

Nutzung ncT-unabhängiger Regressionsfunktionen. Ebenfalls vorhersehbar war, dass die Wahl der Stützstellen (Oberflächentemperaturklassen), die zur Regressionsrechnung herangezogen werden, das Ergebnis erheblich beeinflussen kann. Überraschender ist die Tatsache, dass bei Nutzung der ncT-abhängigen Regressionsfunktionen, gemäß der Variante R1 und R2, quasi identische Ergebnisse in Bezug auf den rein numerischen Lösungsansatz zu verzeichnen sind.

Die Bild 3.1 und Bild 3.2 zeigen, dass bei Anwendung der 156 Temperaturprofile ein monoton steigender Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt vorliegt. Da Polynome zweiten Grades und höher einen nicht monotonen Verlauf aufweisen, sollte auf eine Extrapolation außerhalb des für die Regression herangezogenen Wertebereichs der unabhängigen Variable verzichtet werden. Aus diesem Grund sollte auf die Regressionsvarianten 3 und 6 nicht zurückgegriffen werden. Darüber hinaus wiesen diese zwei Varianten (R3 und R6) gegenüber den übrigen ncT-abhängigen (R1 und R2) bzw. ncT-unabhängigen (R4 und R5) Regressionsvarianten die größten Unterschiede, bezogen auf die Schadenssummen, auf (Tabelle 3.4).

Da die Regressionsvariante R2 bei nahezu gleicher Ergebnisgüte mit fast der Hälfte der Stützstellen im Vergleich zur Variante R1 auskommt, wird diese als zielführender im Sinne der Rechenzeitoptimierung angesehen. Im Vergleich zur Referenzvariante (rein numerischer Lösungsprozess) können bei Anwendung der Regressionsvariante R1 für knapp 70% der Belastungszustände die Dehnungen im Nachweispunkt rein analytisch ermittelt werden.

### 3.3 Verringerung der numerisch zu berücksichtigenden Materialeigenschafts- und Konstruktionszustände

Bei Nutzung der probabilistischen Verfahrensweise zur Dimensionierung bzw. Prognose werden sowohl die Variabilität der temperaturbezogenen Steifigkeitsmoduln als auch die Variabilität der Asphaltpaketdicke durch unterschiedliche Klassenfunktionen (Steifigkeitsmodul-Temperaturfunktionen) bzw. Klassen (Dickenklassen) mit entsprechende Auftretenswahrscheinlichkeiten berücksichtigt (Wellner, Kayser u. a. 2013; Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018). Je höher die Anzahl dieser unterschiedlichen Klassenfunktionen/Klassen ist, desto genauer können die Variabilität der Steifigkeitsmoduln sowie die Dickenschwankungen beschrieben werden. Dies erhöht jedoch deutlich den numerischen Rechenaufwand, da für jede dieser Klassenfunktionen/Klasse quasi das gesamte Spektrum der Belastungssituation berücksichtigt werden muss. Die Anzahl der numerisch zu berücksichtigenden Belastungssituation kann zwar durch die Verwendung von Temperatur- Dehnungsfunktionen (siehe Abschnitt 3.2) reduziert werden, jedoch ist eine weitere Abminderung der numerischen Berechnungsvorgänge, insbesondere bei Einbindung der Finite-Elemente-Methode, wünschenswert und sinnvoll.

#### 3.3.1 Steifigkeitsklassen (Variabilität der Steifigkeitsmoduln)

Die Variabilität des Steifigkeitsmoduls eines Asphaltes, bezogen auf eine konkrete Temperatur, wird durch unterschiedliche Steifigkeitsmodul-Temperaturfunktionen (auch Klassenfunktionen genannt) abgebildet (Wellner, Kayser u. a. 2013; Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018). Die Anzahl dieser Funktionen wird vor einer Dimensionierungs- bzw. Substanzberechnung vom Nutzer vorgegeben. Jede dieser Steifigkeitsmodul-Temperaturfunktionen besitzt ihrerseits eine Wahrscheinlichkeit, mit der diese Eigenschaften (temperaturabhängige Steifigkeit) auf einen Streckenabschnitt auftreten. Die Wahrscheinlichkeiten sind dabei u.a. abhängig von der Anzahl an Funktionen (Klassen), die zuvor definiert worden.

Durch die Formulierung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen Steifigkeitsmodul und entsprechender Dehnung im Nachweispunkt, bezogen auf einen definierten Temperaturzustand, kann die Anzahl der Klassenfunktionen zur Berücksichtigung der Variabilität der temperaturbezogenen Steifigkeitsmoduln, die numerisch analysiert werden müssen, verringert werden.

In der Bild 3.18 und Bild 3.19 sind beispielhaft diese Zusammenhänge, bezogen auf zwei unterschiedliche Temperaturzustände sowie unter Verwendung von 15 Klassenfunktionen, dargestellt. Die Modellparameter  $a_1$  und  $a_2$  der gewählten Potenzfunktion  $y = a_1 \cdot x^{a_2}$  müssen dabei für jeden Temperaturzustand gesondert ermittelt werden. Alternativ zum potentiellen Funktionsansatz kann auch ein Polynom 3. Grades verwendet werden.

### 3.3.2 Dickenklassen (Variabilität der Dicke des Asphaltpakets)

Schwankungen der Asphaltpaketdicke werden im probabilistischen Prognose- und Dimensionierungsprozess durch unterschiedliche Befestigungsvarianten, die sich lediglich hinsichtlich der Dicke der Asphalttragschicht unterscheiden (Dickenklassen), berücksichtigt. Auf jede dieser Befestigungsvarianten (Dickenklassen) werden nach derzeitiger Verfahrensweise alle Belastungszustände sowie alle Klassenfunktionen der Steifigkeitsmodul-Temperaturfunktion (zur Berücksichtigung der Variabilität der Steifigkeitsmoduln) angewendet, um die Schadenssummen zu berechnen. Der numerische Berechnungsaufwand bei Berücksichtigung der Schwankungen der Asphaltpaketdicke steigt somit direkt proportional zur Anzahl der zu berücksichtigenden Dickenklassen.

Durch die Formulierung eines funktionalen Zusammenhangs zwischen Asphaltpaketdicke und entsprechender Dehnung im Nachweispunkt, bezogen auf einen definierten Temperaturzustand, sowie eine definierte Klassenfunktionen der Steifigkeitsmodul-Temperaturfunktion, kann die Anzahl der Befestigungsvarianten zur Berücksichtigung von Dickenschwankungen, die numerisch berechnet werden müssen, verringert werden.

In der Bild 3.20 und Bild 3.21 sind beispielhaft diese Zusammenhänge dargestellt. Die Approximation des Zusammenhangs kann sowohl mit einer Potenzfunktion wie auch mit einem Polynom 3. Grades erfolgen.

### 3.3.3 Anwendungsbeispiel

Die nachfolgend beschriebenen Beispiele sollen die Anwendung der zuvor benannten analytischen Lösungsprozesse demonstrieren. Die Berechnung wurde zunächst auf herkömmlichen Wege durch Nutzung ausschließlich numerischer Lösungsalgorithmen durchgeführt (Referenzvariante). Anschließend wurde ein Teil dieser numerischen Berechnungsvorgänge durch analytische Lösungsprozesse ersetzt (Alternativvarianten siehe Tabelle 3.5).

Ausgangspunkt ist die unter Abschnitt 3.2.2 beschriebene Beispielbauweise. Zur Überprüfung der Übertragbarkeit der analytischen Lösungsprozesse sind die Berechnungen für vier unterschiedliche Asphalttragschichten durchgeführt worden. Die entsprechenden Materialeigenschaften sind den Bild 3.7 bis Bild 3.10 zu entnehmen.

In der Beispielrechnungen wurde jeweils nur die Variabilität der temperaturbezogenen Steifigkeitsmoduln der Asphalttragschichten berücksichtigt und diese wurden durch 15 Klassenfunktionen beschrieben. Die Schwankungen der Asphaltpaketdicke wird durch 15 Dickenklassen abgebildet. Als Verkehrsbelastung wird beispielhaft von nur einer Achslastklasse (10t) ausgegangen. Die zu berücksichtigenden Temperaturbedingungen werden durch 156 Temperaturzustände (12 ncT's x 13 TFO-Klassen) dargestellt.

Für die Berechnung der Schadenssummen bzw. der Ausfallwahrscheinlichkeit der Referenzvariante mussten somit  $12 \times 13 \times 15 \times 15 = 35.100$  Belastungs- sowie Materialeigenschafts- und Konstruktionszustände numerisch analysiert werden.

Für die Alternativvarianten (siehe Tabelle 3.5) wurden nur ausgewählte Steifigkeitsmodul- und Dickenklassen zur Bildung der Regressionsfunktionen herangezogen und numerisch analysiert. Für die übrigen Belastungs- sowie Materialeigenschafts- und Konstruktionszustände wurden die Dehnungen im Nachweispunkt anschließend durch die zuvor gebildeten Regressionsfunktionen analytisch berechnet.

In Bild 3.22 sind beispielhaft für die Variante V2 der Tabelle 3.5 die numerischen und die mit Hilfe der Regressionsgleichungen analytisch berechneten Dehnungen für die Asphalttragschichtvariante ATS4 dargestellt.

Die so numerisch und analytisch ermittelten Dehnungen wurden anschließend in Ermüdungslastwechselzahlen umgerechnet und mittels der Schadenshypothese von Miner (1945) bewertet. In Tabelle 3.6 bis Tabelle 3.9 sind die berechneten jährlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten für die Referenz- sowie die drei Alternativvarianten dargestellt. Die relativen Unterschiede der jährlichen Schadenssummen der Alternativvarianten bezogen auf die Referenzvariante ist der Tabelle 3.10 bzw. der Bild 3.23 zu entnehmen.

Die relativen Veränderungen der Flächen unterhalb der Ganglinien der Ausfallwahrscheinlichkeiten zwischen Regressionsvarianten und Referenzvariante sowie die Korrelationskoeffizienten – als Gütemaße für die Übereinstimmung der Ganglinien – sind Bild 3.24 und Bild 3.25 zu entnehmen.

Die Ergebnisse zeigen deutlich, dass bei der Dimensionierung- bzw. Substanzwertbestimmung von Asphaltstraßenbefestigungen auf einen Großteil der numerisch zu behandelnden Belastungs- sowie Materialeigenschafts- und Konstruktionszustände verzichtet werden kann und für diese die relevanten Dehnungen stattdessen mit sehr guter Näherung durch Regressionsgleichungen rein analytisch bestimmt werden können.

### 3.4 Zusammenfassende Beschreibung der Vorgehensweise

Allgemeiner Hinweis zur nachfolgenden Schreibweise: Alle Zeichen die mit einem (·) akzentuiert sind, kennzeichnen Elemente, die sich auf den numerischen Rechenprozess beziehen. Alle mit einer (˜) akzentuierten Zeichen auf Elemente, die sich auf den analytischen Rechenprozess beziehen. Nicht akzentuierte Zeichen gelten für beide Prozesse.

### 3.4.1 Belastungszustände im Dimensionierungs- bzw. Prognoseprozess

Bei der Dimensionierung einer neuen bzw. bei der Prognose der Restnutzungsdauer einer bestehenden Asphaltstraßenbefestigungen werden verschiedene Belastungszustände berücksichtigt. Diese gliedern sich in Verkehrslasten und Temperaturzustände. Jeder Temperaturzustand ergibt sich aus einem normierten charakteristischen Temperaturzustand (ncT) verknüpft mit einer Oberflächentemperatur (Oberflächentemperaturklasse).

$$\Psi = \{\psi_v | v = 1 \dots V\} \quad (3.19)$$

$$\Theta = \{\vartheta_t | t = 1 \dots T\} \quad (3.20)$$

$$\Xi = \{\xi_j | j = 1 \dots J\} \quad (3.21)$$

$\Psi$  Menge aller Achslastzustände

$\Theta$  Menge aller Oberflächentemperaturzustände

$\Xi$  Menge aller ncT-Zustände

$\psi_v$  Achslastzustand  $v$

$\vartheta_t$  Oberflächentemperaturzustand (TFO-Zustand)  $t$

$\xi_j$  ncT-Zustand  $j$

$v$  Index der Achslastklasse (Achslastzustand)

$t$  Index der Oberflächentemperaturklasse (TFO-Zustände)

$j$  Index für die ncTs (ncT-Zustände)

Gemäß dem derzeitigen Stand der Regelwerksüberarbeitung/Regelwerkserarbeitung der RDO Asphalt bzw. der RSO Asphalt gelten für die Klassenanzahlen:  $V = 22$ ;  $T = 13$ ;  $J = 12$ .

Damit ergeben sich insgesamt 3.718 Belastungszustände.

$$B = \{\beta_{v,t,j} | v = 1 \dots 22, t = 1 \dots 13, j = 1 \dots 12\} = \{\beta_k | k = 1 \dots 3.718\} \quad (3.22)$$

$B$  Menge aller Belastungszustände

$\beta_{v,t,j} = \beta_k$  Belastungszustand

### 3.4.2 Stochastische Modellierung der Variabilität der Material- und Konstruktionseigenschaften

Die Variabilität der Material- und Konstruktionseigenschaften werden analog zu den in [WEL13] beschriebenen Vorgehensweisen modelliert und entsprechende Zustandsklassen der Material- und Konstruktionseigenschaften definiert.

Es gilt für die Mengen der jeweiligen Zustandsklassen:

$$S = \{s_u | u = 1 \dots U\} \quad (3.23)$$

$$D = \{d_h | h = 1 \dots H\} \quad (3.24)$$

$S$  Menge aller Steifigkeitsklassen

$D$  Menge aller Dickenklassen

$s_u$  Steifigkeitsklasse  $u$

$d_h$  Dickenklasse  $h$

$u$  Index für die Steifigkeitsklasse

$h$  Index für die Dickenklasse

Die Anzahl der Klassen ( $U$  und  $H$ ) sind frei wählbar, sollten jedoch einer ungeraden Anzahl entsprechen.

### 3.4.3 Auswahl der maßgebenden Belastungszustände und Zustandsklassen der Material- und Konstruktionseigenschaften

Für die numerischen Berechnungen werden ausgewählte Belastungszustände und Zustandsklassen der Material- und Konstruktionseigenschaften berücksichtigt. Die übrigen Belastungs- sowie Material- und Konstruktionseignschaftszustände werden später analytisch berechnet.

Unter Berücksichtigung der derzeit verwendeten Stoffmodelle und numerischen Rechenmethoden werden folgende Belastungssituationen für die numerischen Berechnungen als notwendig angesehen:

- 1 Achslastklasse [10t]; ( $\dot{\psi}_v | v = 1$ )
- 4 Oberflächentemperaturen  $[-12,5^\circ\text{C}, 7,5^\circ\text{C}, 27,5^\circ\text{C}$  und  $47,5^\circ\text{C}$ ; ( $\dot{\vartheta}_t | t = 1 \dots 4$ ) .
- 12 normierte Temperaturverläufe [ncT1, ncT2, ..., ncT12]; ( $\dot{\xi}_j | j = 1 \dots 12$ )

Da alle 12 ncT-Zustände auch für die numerische Berechnung herangezogen werden, gilt:

$$\dot{\xi}_j = \xi_j \quad (3.25)$$

Damit ergeben sich insgesamt 48 Belastungszustände die numerisch behandelt werden müssen.

$$\dot{B} = \{\dot{\beta}_{v,t,j} | v = 1, t = 1..4, j = 1..12\} = \{\dot{\beta}_k | k = 1..48\} \quad (3.26)$$

$\dot{B}$  Menge aller Belastungszustände, die numerisch behandelt werden

$\dot{\beta}_{v,t,j} = \dot{\beta}_k$  Belastungszustand, der numerisch behandelt wurde

$v$  Index für die Achslastklasse

$t$  Index für die Oberflächentemperaturklasse (TFO-Zustand)

$j$  Index für die ncT-Zustand

$k$  Index für den kombinierten Belastungszustand aus  $v$ ,  $t$  und  $j$

Für die Zustandsklassen der Material- und Konstruktionseigenschaften wird folgendes vorgeschlagen:

Für den numerischen Lösungsprozess werden jeweils drei Zustandsklassen für die Steifigkeit und drei Zustandsklassen für die Asphaltpaketdicke berücksichtigt, wobei jeweils die beiden äußeren Randklassen der Verteilungen zwingend mit berücksichtigt werden müssen, um eine spätere Extrapolation zu vermeiden.

$$\dot{S} = \{\dot{s}_u | u = 1, U, (U + 1)/2\} \quad (3.27)$$

$$\dot{D} = \{\dot{d}_h | h = 1, H, (H + 1)/2\} \quad (3.28)$$

Damit ergeben sich bei Vernachlässigung der Variabilität der temperaturbezogenen Steifigkeit der Asphaltdeck- und Asphaltbinderschicht neun unterschiedliche Konstruktions- und Materialeigenschaftszustände  $\dot{\Phi}$ .

$$\dot{\Phi} = \{\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dots, \dot{\phi}_9\} = \{\dot{\phi}_f | f = 1..9\} \quad (3.29)$$

Werden die Variabilität der temperaturbezogenen Steifigkeit der Asphaltdeck- und Asphaltbinderschicht mit berücksichtigt, erhöht sich die Anzahl der numerisch zu behandelnden Konstruktions- und Materialeigenschaftszustände auf 81.

### 3.4.4 Numerische Berechnung der Biegezugdehnung im Nachweispunkt

Für die neun Konstruktions- und Materialeigenschaftszustände  $\dot{\Phi} = \{\dot{\phi}_f | f = 1..9\}$  sowie die 48 Belastungszustände  $\dot{B} = \{\dot{\beta}_k | k = 1..48\}$  werden mit Hilfe des numerischen Rechenmodells, die Biegezugdehnungen im Nachweispunkt ermittelt. Im Ergebnis erhält man eine Menge an Dehnungen  $\dot{E}$  – je eine Dehnung pro Zustandskombination.

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \{\dot{\varepsilon}_{\dot{\beta}_v, t, j, \dot{\phi}_f} | v = 1, t = 1..4, j = 1..12, f = 1..9\} \\ &= \{\dot{\varepsilon}_{\dot{\beta}_k, \dot{\phi}_f} | k = 1..48, f = 1..9\}\end{aligned}\quad (3.30)$$

$\dot{E}$  Menge aller Dehnungen, die numerisch ermittelt werden

$\dot{\varepsilon}_{\dot{\beta}_k, \dot{\phi}_f}$  Numerisch ermittelte Dehnung im Belastungszustand  $\dot{\beta}_k$  sowie im Konstruktions- und Materialeigenschaftszustand  $\dot{\phi}_f$

$k$  Index für den „kombinierten“ Belastungszustand aus Oberflächentemperatur-klasse, ncT und Achslastklasse

$f$  Index für den „kombinierten“ Material- und Konstruktionseigenschaftszustand aus Steifigkeitsklasse und Dickenklasse

### 3.4.5 Temperatur-Dehnungs-Beziehung

Der Zusammenhang zwischen Temperatur ( $\vartheta$ ) im Nachweispunkt und Dehnung ( $\varepsilon$ ) im Nachweispunkt wird mit einem Polynom 3. Grades funktional beschrieben.

$$\tilde{\varepsilon}_{\dot{\psi}_v, \xi_j, \dot{\phi}_f} = a_{1_{\dot{\psi}_v, \xi_j, \dot{\phi}_f}} \cdot \vartheta^3 + a_{2_{\dot{\psi}_v, \xi_j, \dot{\phi}_f}} \cdot \vartheta^2 + a_{3_{\dot{\psi}_v, \xi_j, \dot{\phi}_f}} \cdot \vartheta + a_{4_{\dot{\psi}_v, \xi_j, \dot{\phi}_f}} \quad (3.31)$$

$\tilde{\varepsilon}_{\dot{\psi}_v, \xi_j, \dot{\phi}_f}$  analytisch ermittelte Dehnung im Achslastzustand  $\dot{\psi}_v$ , ncT-Zustand  $\xi_j$  sowie im Konstruktions- und Materialeigenschaftszustand  $\dot{\phi}_f$

$\vartheta$  Temperatur am Nachweispunkt (i.d.R. Unterseite der Asphalttragschicht)

$a_{1_{\dot{\psi}_v, \xi_j, \dot{\phi}_f}} \dots a_{4_{\dot{\psi}_v, \xi_j, \dot{\phi}_f}}$  Modellparameter im Achslastzustand  $\dot{\psi}_v$ , ncT-Zustand  $\xi_j$  sowie im Material- und Konstruktionseigenschaftszustand  $\dot{\phi}_f$

Die Berechnung der Modellparameter  $a_{1_{\dot{\psi}_v, \xi_j, \dot{\phi}_f}}$  bis  $a_{4_{\dot{\psi}_v, \xi_j, \dot{\phi}_f}}$  erfolgt gemäß der in Abschnitt 3.1.3 beschriebenen Vorgehensweise. Als Stichprobe  $\dot{\Gamma}_1$  zur Bestimmung dieser Modellparameter werden die numerisch ermittelten Dehnungen der vier berücksichtigten Oberflächentemperaturklassen sowie die zugehörigen Temperaturen im Nachweispunkt herangezogen.

$$\dot{\Gamma}_1 = \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\epsilon}_{\psi_v, \xi_j, \dot{\phi}_f, \dot{\vartheta}_{t=1}}, \underline{\vartheta}_{\xi_j, \dot{\phi}_f, \dot{\vartheta}_{t=1}}), \\ (\dot{\epsilon}_{\psi_v, \xi_j, \dot{\phi}_f, \dot{\vartheta}_{t=1}}, \underline{\vartheta}_{\xi_j, \dot{\phi}_f, \dot{\vartheta}_{t=2}}), \\ (\dot{\epsilon}_{\psi_v, \xi_j, \dot{\phi}_f, \dot{\vartheta}_{t=2}}, \underline{\vartheta}_{\xi_j, \dot{\phi}_f, \dot{\vartheta}_{t=3}}), \\ (\dot{\epsilon}_{\psi_v, \xi_j, \dot{\phi}_f, \dot{\vartheta}_{t=2}}, \underline{\vartheta}_{\xi_j, \dot{\phi}_f, \dot{\vartheta}_{t=4}}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\epsilon}_{\dot{\beta}_{v,j,t=1}, \dot{\phi}_f}, \underline{\vartheta}_{\beta_{j,t=1}, \dot{\phi}_f}), \\ (\dot{\epsilon}_{\dot{\beta}_{v,j,t=2}, \dot{\phi}_f}, \underline{\vartheta}_{\beta_{j,t=2}, \dot{\phi}_f}), \\ (\dot{\epsilon}_{\dot{\beta}_{v,j,t=3}, \dot{\phi}_f}, \underline{\vartheta}_{\beta_{j,t=3}, \dot{\phi}_f}), \\ (\dot{\epsilon}_{\dot{\beta}_{v,j,t=4}, \dot{\phi}_f}, \underline{\vartheta}_{\beta_{j,t=4}, \dot{\phi}_f}) \end{array} \right\} \quad (3.32)$$

Durch Einsetzen der Temperaturen  $\underline{\vartheta}_{\dot{\beta}_{v,j,t}, \dot{\phi}_f}$ , der übrigen nicht numerisch betrachteten Oberflächentemperaturklassen  $\tilde{\vartheta}_t$  (mit  $t = 1 \dots 9$ ) in Gleichung 3.31 lassen sich, getrennt nach den ncT-Zuständen  $\xi_j$  sowie getrennt nach den Konstruktions- und Materialeigenschaftszuständen  $\dot{\phi}_f$ , die jeweils zugehörigen Dehnungen  $\tilde{\epsilon}_{\dot{\psi}_v, \tilde{\vartheta}_t, \xi_j, \dot{\phi}_f}$  im Nachweispunkt berechnen und als Teilmenge  $\tilde{E}_{\alpha_1}$  darstellen (Gleichung 3.33).

$$\tilde{E}_{\alpha_1} = \{\tilde{\epsilon}_{\dot{\psi}_v, \tilde{\vartheta}_t, \xi_j, \dot{\phi}_f} | v = 1, t = 1 \dots 9, j = 1 \dots 12, f = 1 \dots 9\} \quad (3.33)$$

$\tilde{E}_{\alpha_1}$  Teilmenge  $\alpha_1$  aller analytisch ermittelten Dehnungen  $\tilde{\epsilon}_{\dot{\psi}_v, \tilde{\vartheta}_t, \xi_j, \dot{\phi}_f}$

$\tilde{\epsilon}_{\dot{\psi}_v, \tilde{\vartheta}_t, \xi_j, \dot{\phi}_f}$  analytisch ermittelte Dehnung im TFO-Zustand  $\tilde{\vartheta}_t$ , im ncT-Zustand  $\xi_j$ , im Achslastzustand  $\dot{\psi}_v$  sowie im Konstruktions- und Materialeigenschaftszustand  $\dot{\phi}_f$

$\tilde{\vartheta}_t$  TFO-Zustand der analytisch behandelt wird/wurde, mit  $t = 1 \dots 9$

Im Ergebnis dieses Arbeitsschrittes erhält man eine Menge  $\tilde{E}_{\alpha_1}$  numerisch und analytisch ermittelter Dehnungen für die Konstruktions- und Materialeigenschaftszustände  $\dot{\phi}_f$ .

Für  $\tilde{E}_{\alpha_1}$  gilt:

$$E_{\alpha_1} = \{\tilde{E}_{\alpha_1}, \dot{E}\} \quad \text{mit } E_{\alpha_1} = \tilde{E}_{\alpha_1} \cup \dot{E} \quad (3.34)$$

### 3.4.6 Steifigkeits-Dehnungs-Beziehung

Der Zusammenhang zwischen Steifigkeitsmodul ( $SM$ ) und Dehnung ( $\epsilon$ ) im Nachweispunkt bezogen auf einen definierten Belastungszustand und Konstruktionszustand kann mit einer Potenzfunktion beschrieben werden.

Hinweis: Bei Anwendung anderer Stoffmodelle und/oder Berechnungsmethoden als bisher, kann es notwendig werden, statt der Potenzfunktion ein Polynom höheren Grades zu nutzen.

$$\tilde{\epsilon}_{\dot{\psi}_v, \tilde{\vartheta}_t, \xi_j, \dot{\phi}_f} = b_{1, \dot{\psi}_v, \tilde{\vartheta}_t, \xi_j, \dot{\phi}_f} \cdot \underline{SM}^{b_{2, \dot{\psi}_v, \tilde{\vartheta}_t, \xi_j, \dot{\phi}_f}} \quad (3.35)$$

$\tilde{\varepsilon}_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h}$  analytisch ermittelte Dehnung im Achslastzustand  $\dot{\psi}_v$ , TFO-Zustand  $\vartheta_t$ , ncT-Zustand  $\xi_j$  sowie bezogen auf die Dickenklasse  $\dot{d}_h$

$\underline{SM}$  Steifigkeitsmodul am Nachweispunkt (i.d.R. Unterseite der Asphalttragschicht)

$b_{1_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h}}, b_{2_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h}}$  Modellparameter für Achslastzustand  $\dot{\psi}_v$ , TFO-Zustand  $\vartheta_t$ , ncT-Zustand  $\xi_j$  sowie bezogen auf die Dickenklasse  $\dot{d}_h$

Die Bestimmung der Modellparameter  $b_{1_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h}}$  und  $b_{2_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h}}$  erfolgt gemäß Abschnitt 3.1.5. Als Stichprobe  $\dot{\Gamma}_2$  zur Bestimmung dieser Modellparameter werden jetzt die numerisch, wie auch die unter Abschnitt 3.4.5 analytisch ermittelten Dehnungen der drei Steifigkeitsklassen (siehe Abschnitt 3.4.2) sowie die zugehörigen Steifigkeitsmodulen im Nachweispunkt getrennt nach Belastungszustand und Dickenklasse verwendet.

Hinweis: Bei Verwendung eines Polynoms werden in Abhängigkeit dessen Grades ggf. mehr als nur drei Steifigkeitsklassen erforderlich.

$$\dot{\Gamma}_2 = \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\varepsilon}_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h, \dot{s}_u=1}, \underline{SM}_{\vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h, \dot{s}_u=1}), \\ (\dot{\varepsilon}_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h, \dot{s}_u=(U+1)/2}, \underline{SM}_{\vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h, \dot{s}_u=(U+1)/2}), \\ (\dot{\varepsilon}_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h, \dot{s}_u=U}, \underline{SM}_{\vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h, \dot{s}_u=U}) \end{array} \right\} \quad (3.36)$$

Anschließend können für alle übrigen der unter Abschnitt 3.4.1 gewählten, aber nicht numerisch berücksichtigten Steifigkeitsklassen  $\tilde{s}_u$  die Dehnungen  $\tilde{\varepsilon}_{\tilde{s}_u, \dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h}$  im Nachweispunkt aus den jeweiligen Steifigkeiten  $\underline{SM}_{\tilde{s}_u, \vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h}$  analytisch berechnet werden. Dies geschieht getrennt für alle kombinierten Belastungszustände  $\dot{\psi}_v$ ,  $\vartheta_t$ ,  $\xi_j$  sowie für die drei Dickenklassen  $\dot{d}_h$ .

$$\tilde{E}_{\alpha_2} = \{\tilde{\varepsilon}_{\tilde{s}_u, \dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h} | u = 1 \dots U - 3, v = 1, t = 1 \dots 13, j = 1 \dots 12, h = 1 \dots 3\} \quad (3.37)$$

$\tilde{E}_{\alpha_2}$  Teilmenge  $\alpha_2$  aller analytisch ermittelten Dehnungen  $\tilde{\varepsilon}_{\tilde{s}_u, \dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h}$

$\tilde{\varepsilon}_{\tilde{s}_u, \dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, \dot{d}_h}$  analytisch ermittelte Dehnung im TFO-Zustand  $\vartheta_t$ , im ncT-Zustand  $\xi_j$ , im Achslastzustand  $\dot{\psi}_v$  sowie im Konstruktionszustand (Dickenklasse)  $\dot{d}_h$

$\tilde{s}_u$  Steifigkeitsklasse die analytisch behandelt wird/wurde, mit  $u = 1 \dots U - 3$

Für  $\tilde{s}_u$  gilt:

$$\tilde{s}_u \in \tilde{S} \text{ mit } \tilde{S} = \{\tilde{s}_u | u = 1 \dots U - 3\} \text{ und } \tilde{S} \subseteq S$$

Im Ergebnis dieses Arbeitsschrittes erhält man eine Menge  $\tilde{E}_{\alpha_2}$  numerisch und analytisch ermittelter Dehnungen für die Konstruktionszustände  $\dot{d}_h$ .

Für  $\tilde{E}_{\alpha_2}$  gilt:

$$E_{\alpha_2} = \{\tilde{E}_{\alpha_2}, E_{\alpha_1}\} \quad \text{mit } E_{\alpha_2} = \tilde{E}_{\alpha_2} \cup E_{\alpha_1} \quad (3.38)$$

### 3.4.7 Asphaltpaketdicke-Dehnungs-Beziehung

Der Zusammenhang zwischen Asphaltpaketdicke (APD) und Dehnung ( $\varepsilon$ ) im Nachweispunkt bezogen auf einen definierten Belastungszustand und Materialeigenschaftszustand kann mit einer Potenzfunktion (Gleichung 3.39) beschrieben werden.

Hinweis: Bei Anwendung anderer Stoffmodelle und/oder Berechnungsmethoden als bisher, kann es notwendig werden, statt der Potenzfunktion ein Polynom höheren Grades zu nutzen.

$$\tilde{\varepsilon}_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u} = c_{1_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u}} \cdot APD^{c_{2_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u}}} \quad (3.39)$$

$\tilde{\varepsilon}_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u}$  analytisch ermittelte Dehnung im Achslastzustand  $\dot{\psi}_v$ , TFO-Zustand  $\vartheta_t$ , ncT-Zustand  $\xi_j$  sowie bezogen auf die Steifigkeitsklasse  $s_u$

$APD$  Asphaltpaketdicke

$c_{1_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u}}, c_{2_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u}}$  Modellparameter für Achslastzustand  $\dot{\psi}_v$ , TFO-Zustand  $\vartheta_t$ , ncT-Zustand  $\xi_j$  sowie bezogen auf die Steifigkeitsklasse  $s_u$

Die Bestimmung der Modellparameter  $c_{1_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u}}$  und  $c_{2_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u}}$  erfolgt gemäß Abschnitt 3.1.5. Als Stichprobe  $\dot{\Gamma}_3$  zur Bestimmung dieser Modellparameter werden jetzt die numerisch, wie auch die unter Abschnitt 3.4.5 und Abschnitt 3.4.6 analytisch ermittelten Dehnungen der drei Dickenklassen (siehe Abschnitt 3.4.2) sowie die zugehörigen Asphaltpaketdicken dieser Dickenklassen getrennt nach Belastungszustand und Steifigkeitsklasse verwendet.

Hinweis: Bei Verwendung eines Polynoms werden in Abhängigkeit dessen Grades ggf. mehr als nur drei Dickenklassen erforderlich.

$$\dot{\Gamma}_3 = \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\varepsilon}_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u, \dot{d}_{h=1}}, APD_{\dot{d}_{h=1}}), \\ (\dot{\varepsilon}_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u, \dot{d}_{h=(H+1)/2}}, APD_{\dot{d}_{h=(H+1)/2}}), \\ (\dot{\varepsilon}_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u, \dot{d}_{h=H}}, APD_{\dot{d}_{h=H}}) \end{array} \right\} \quad (3.40)$$

Anschließend können für alle übrigen der unter Abschnitt 3.4.1 gewählten, aber nicht numerisch berücksichtigten Dickenklassen  $\tilde{d}_h$ , die Dehnungen  $\tilde{\varepsilon}_{\tilde{d}_h, \dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u}$  im Nachweispunkt aus den jeweiligen Asphaltpaketdicken  $APD_{\tilde{d}_h}$  analytisch berechnet werden. Dies geschieht getrennt für alle kombinierten Belastungszustände  $\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j$  sowie für die Steifigkeitsklassen  $s_u$ .

$$\tilde{E}_{\alpha_3} = \{\tilde{\varepsilon}_{\tilde{d}_h, \dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u} | h = 1 \dots H - 3, v = 1, t = 1 \dots 13, j = 1 \dots 12, u = 1 \dots U\} \quad (3.41)$$

$\tilde{E}_{\alpha_3}$  Teilmenge  $\alpha_3$  aller analytisch ermittelten Dehnungen  $\tilde{\varepsilon}_{\tilde{d}_h, \dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u}$

$\tilde{\varepsilon}_{\tilde{d}_h, \dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u}$  analytisch ermittelte Dehnung im TFO-Zustand  $\vartheta_t$ , im ncT-Zustand  $\xi_j$ , im Achslastzustand  $\dot{\psi}_v$  sowie im Materialeigenschaftszustand (Steifigkeitsklasse)  $s_u$

$\tilde{d}_h$  Dickenklasse die analytisch behandelt wird/wurde, mit  $h = 1 \dots H - 3$

Für  $\tilde{d}_h$  gilt:

$$\tilde{d}_h \in \tilde{D} \text{ mit } \tilde{D} = \{\tilde{d}_h | h = 1 \dots H - 3\} \text{ und } \tilde{D} \subseteq D$$

Im Ergebnis dieses Arbeitsschrittes erhält man eine Menge  $\tilde{E}_{\alpha_3}$  numerisch und analytisch ermittelter Dehnungen für alle Konstruktions- und Materialeigenschaftszustände.

Für  $\tilde{E}_{\alpha_3}$  gilt:

$$E_{\alpha_3} = \{\tilde{E}_{\alpha_3}, E_{\alpha_2}\} \quad \text{mit } E_{\alpha_3} = \tilde{E}_{\alpha_3} \cup E_{\alpha_2} \quad (3.42)$$

### 3.4.8 Einbeziehung der unterschiedlichen Achslastklassen

Die achslastklassenbezogenen Dehnung ( $\varepsilon$ ) im Nachweispunkt werden abschließend nach folgendem linearen Zusammenhang ermittelt.

$$\tilde{\varepsilon}_{\tilde{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u, d_h} = \varepsilon_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u, d_h} \cdot \frac{AL_{\tilde{\psi}_v}}{AL_{\dot{\psi}_v}} \quad (3.43)$$

$\tilde{\varepsilon}_{\tilde{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u, d_h}$  analytisch ermittelte Dehnung der Achslastklasse  $\tilde{\psi}_v$  im TFO-Zustand  $\vartheta_t$ , ncT-Zustand  $\xi_j$ , Materialeigenschaftszustand  $s_u$  und Konstruktionszustand  $d_h$

$\varepsilon_{\dot{\psi}_v, \vartheta_t, \xi_j, s_u, d_h}$  analytisch oder numerisch ermittelte Dehnung der Achslastklasse  $\dot{\psi}_v$  im TFO-Zustand  $\vartheta_t$ , ncT-Zustand  $\xi_j$ , Materialeigenschaftszustand  $s_u$  und Konstruktionszustand  $d_h$

$AL_{\tilde{\psi}_v}$  Achslast der Achslastklasse  $\tilde{\psi}_v$

$AL_{\dot{\psi}_v}$  Achslast der Achslastklasse  $\dot{\psi}_v$

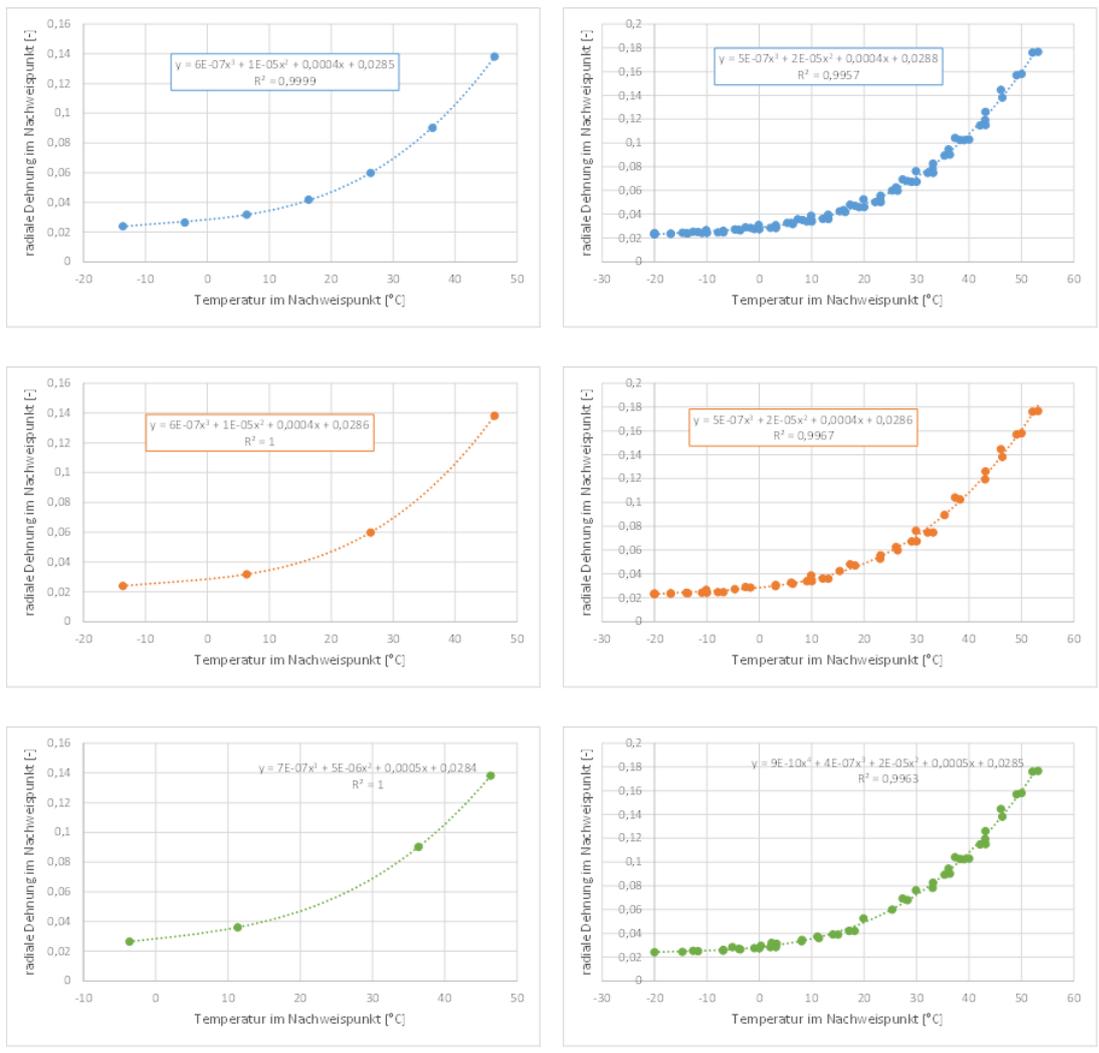


Bild 3.13: Beispiele für die sechs Regressionsansätze zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt; links-oben = R1, links-mitte = R2, links-unten = R3, rechts-oben = R4, rechts-mitte = R5, rechts-unten = R6.

Jahr	PD( $\varepsilon_{num}$ )	PD( $\varepsilon_{R1}$ )	PD( $\varepsilon_{R2}$ )	PD( $\varepsilon_{R3}$ )	PD( $\varepsilon_{R4}$ )	PD( $\varepsilon_{R5}$ )	PD( $\varepsilon_{R6}$ )
1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
3	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
4	3,32%	3,32%	3,32%	3,32%	3,32%	3,32%	3,32%
5	3,32%	3,32%	3,32%	3,32%	3,32%	3,32%	3,32%
6	3,32%	3,32%	3,32%	3,32%	3,32%	3,32%	<b>11,83%</b>
7	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%
8	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%
9	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%
10	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%
11	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	<b>15,15%</b>
12	11,83%	11,83%	11,83%	11,83%	<b>15,15%</b>	<b>30,42%</b>	<b>30,42%</b>
13	30,42%	30,42%	30,42%	<b>15,15%</b>	30,42%	30,42%	30,42%
14	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%
15	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%
16	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%
17	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%
18	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%
19	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%
20	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%
21	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%
22	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	<b>69,58%</b>
23	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	<b>69,58%</b>	<b>69,58%</b>
24	30,42%	30,42%	30,42%	30,42%	<b>69,58%</b>	<b>69,58%</b>	<b>69,58%</b>
25	69,58%	69,58%	69,58%	<b>30,42%</b>	69,58%	69,58%	69,58%
26	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%
27	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%
28	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%
29	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%
30	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%	69,58%
$\sum$ PD(t)	863,46%	863,46%	863,46%	809,03%	905,94%	960,37%	1011,36%
<i>R</i>		100,0%	100,0%	94,7%	95,7%	91,4%	88,4%

Tabelle 3.3: Verlauf der Ausfallwahrscheinlichkeit über die Nutzungsdauer (= Ganglinie der Ausfallwahrscheinlichkeit) für die Referenzvariante - PD( $\varepsilon_{num}$ ) sowie für die sechs untersuchten Regressionsvarianten - PD( $\varepsilon_{R1}$ ) bis PD( $\varepsilon_{R6}$ ) unter Nutzung der ATS4.

Konst.-var Reg.-var.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mittelwert
R1	0,1%	0,0%	0,1%	0,1%	0,0%	0,0%	0,2%	0,1%	0,0%	0,1%
R2	-0,5%	-0,8%	-1,0%	-0,6%	-0,9%	-1,1%	-0,6%	-0,9%	-1,3%	-0,8%
R3	1,1%	1,4%	1,9%	1,4%	1,6%	2,1%	1,9%	2,0%	2,4%	1,7%
R4	-4,5%	-5,0%	-4,7%	-4,4%	-5,0%	-4,8%	-4,4%	-5,0%	-4,9%	-4,8%
R5	-9,4%	-10,2%	-9,6%	-9,4%	-10,3%	-9,8%	-9,5%	-10,4%	-10,0%	-9,8%
R6	-13,6%	-13,3%	-12,0%	-13,6%	-13,4%	-12,2%	-13,6%	-13,5%	-12,3%	-13,0%

Tabelle 3.4: Relative Unterschiede der Schadenssummen der Referenzvariante im Vergleich zu den Schadenssummen der sechs untersuchten Regressionsvarianten bezogen auf die neun Konstruktionsvarianten sowie unter Nutzung der ATS4.

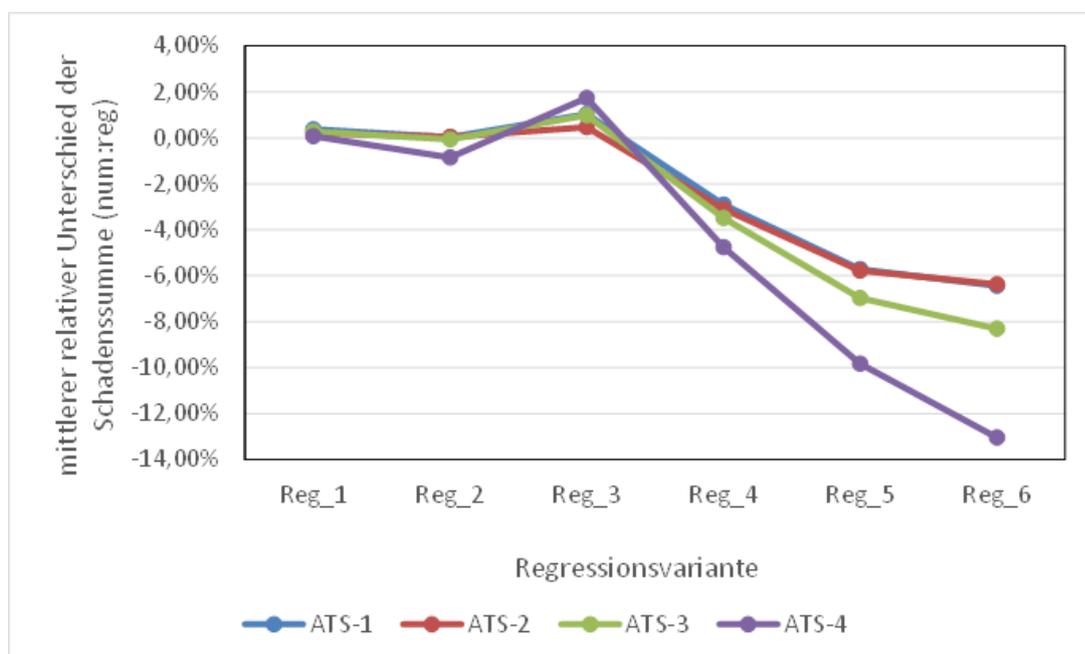


Bild 3.14: Relative Unterschiede der Schadenssummen der Referenzvariante im Vergleich zu den Schadenssummen der sechs untersuchten Regressionsvarianten (jeweils Mittelwert der neun Konstruktionsvarianten).

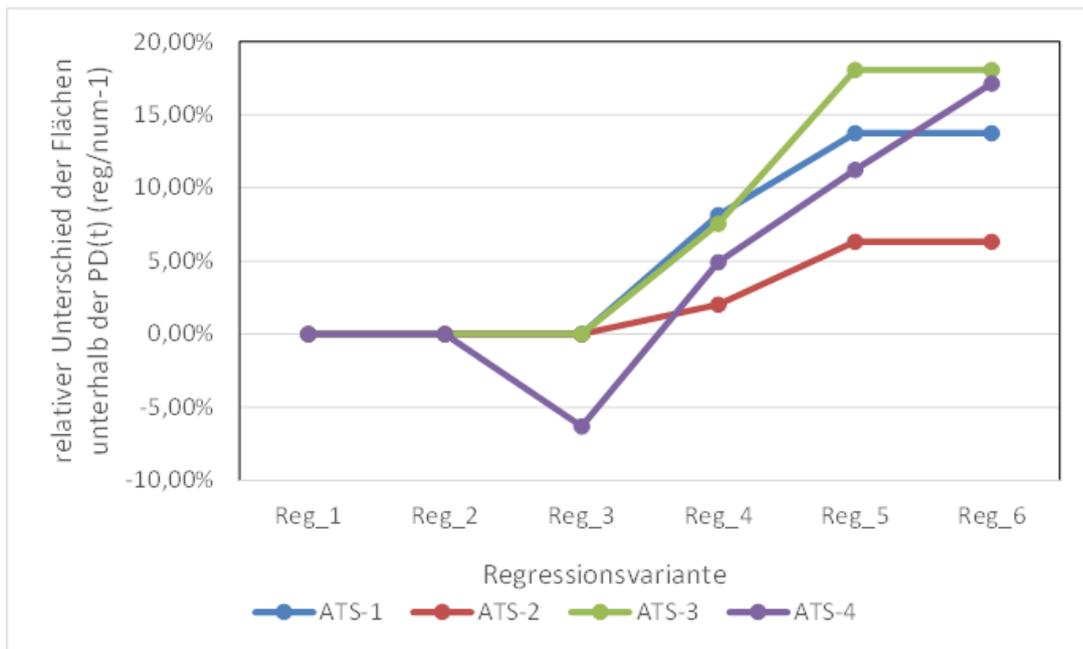


Bild 3.15: Relative Unterschiede der Flächen unterhalb der Ganglinie der Ausfallwahrscheinlichkeit zwischen der Referenzvariante und den sechs untersuchten Regressionsvarianten.

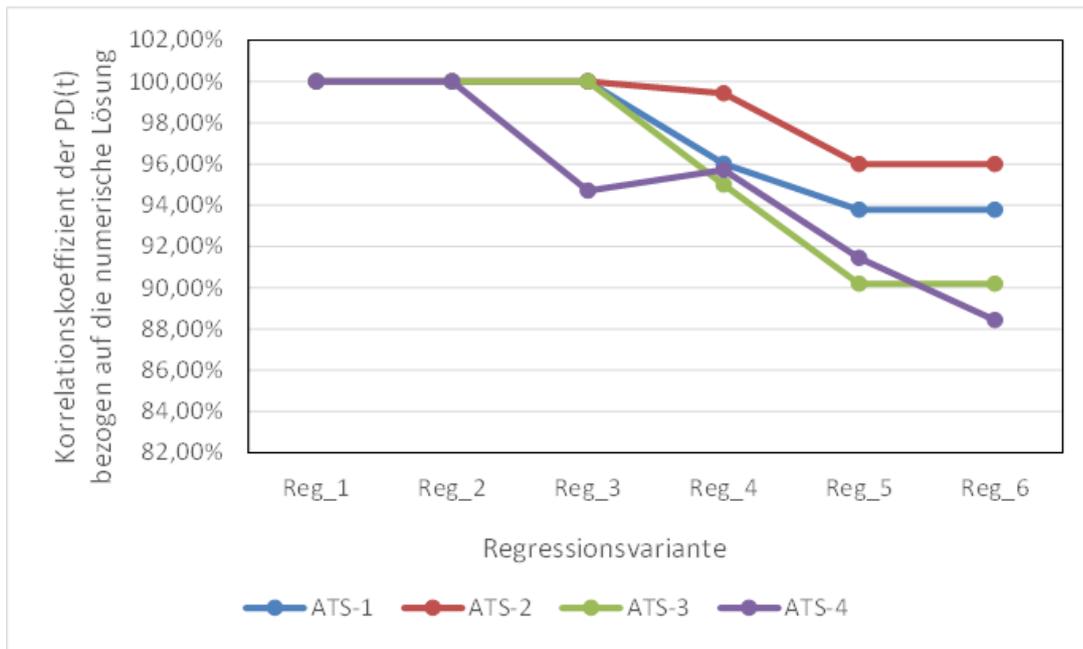


Bild 3.16: Korrelationskoeffizient der Ganglinien der Ausfallwahrscheinlichkeit zwischen der Referenzvariante und den sechs untersuchten Regressionsvarianten.

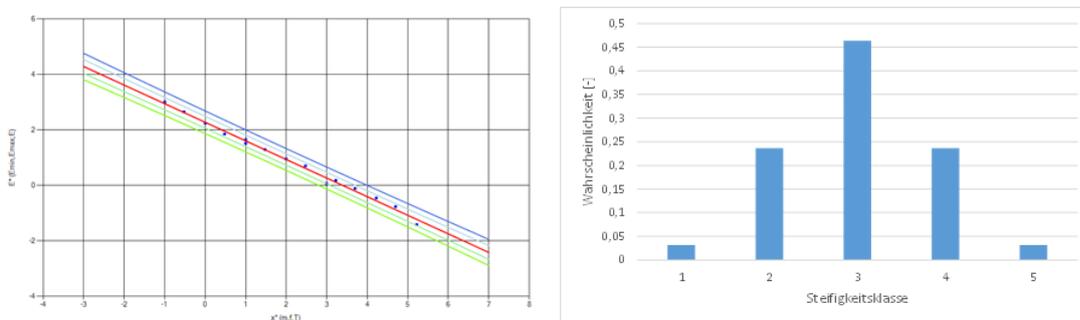


Bild 3.17: Linearisierte Steifigkeitsmodul-Temperaturfunktionen (links) und zugehörige Wahrscheinlichkeiten (rechts) am Beispiel des ATS4 und der Modellierung der Steifigkeitsvariabilität durch fünf Klassen.

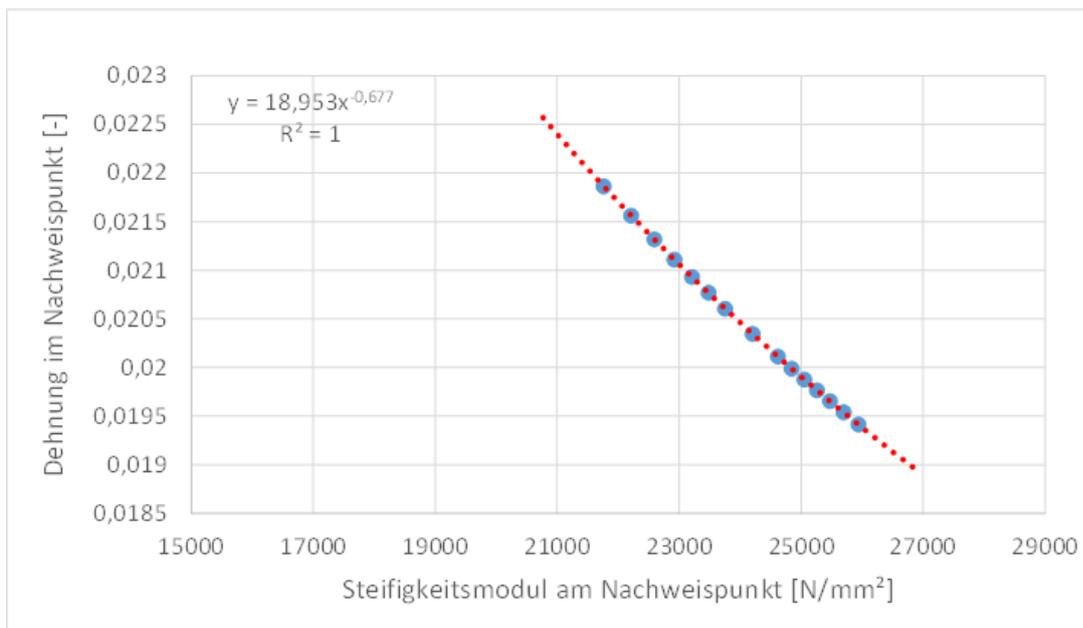


Bild 3.18: Zusammenhang zwischen Steifigkeitsmodul am Nachweispunkt und zugehöriger radialer Dehnung für einen ausgewählten Temperaturzustand ( $ncT = 1$ ;  $TFO = -12,5\text{ °C}$ ) für 15 unterschiedliche Steifigkeitsklassen.

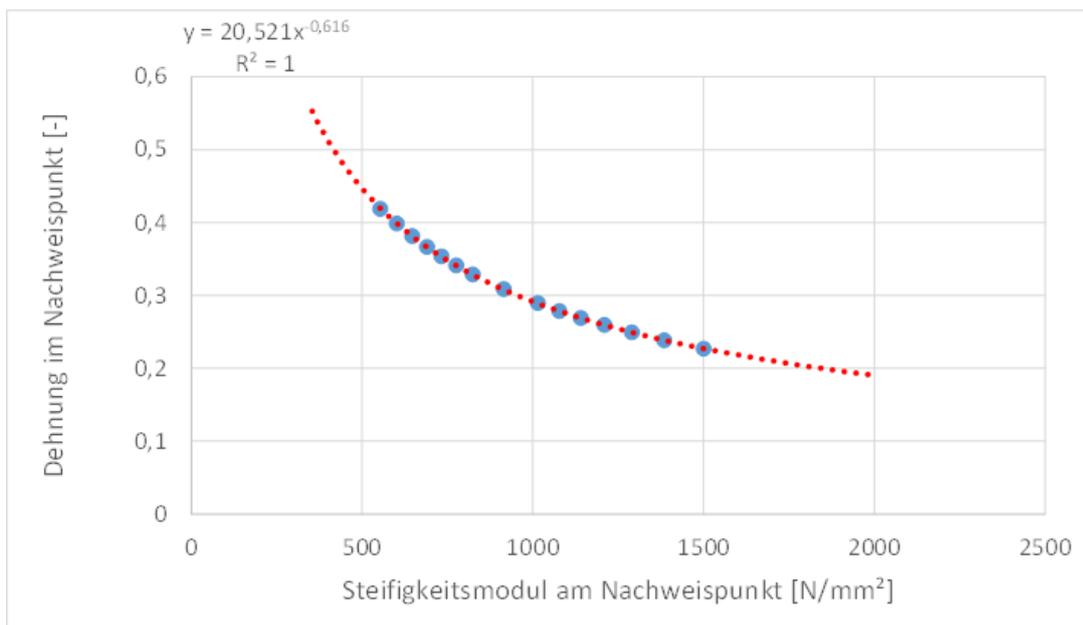


Bild 3.19: Zusammenhang zwischen Steifigkeitsmodul am Nachweispunkt und zugehöriger radialer Dehnung für einen ausgewählten Temperaturzustand ( $ncT = 4$ ;  $TFO = 47,5\text{ °C}$ ) für 15 unterschiedliche Steifigkeitsklassen.

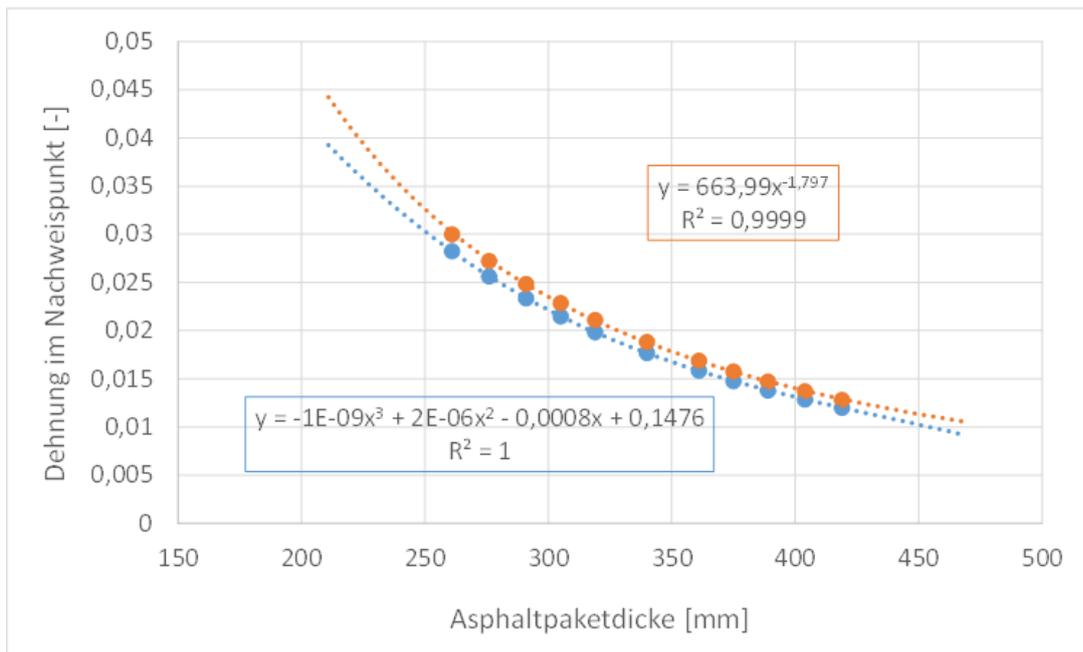


Bild 3.20: Zusammenhang zwischen Asphaltpaketdicke und zugehöriger radialer Dehnung am Nachweispunkt für einen ausgewählten Temperaturzustand (ncT = 1; -12,5 °C) und für zwei unterschiedliche Steifigkeitsklassen.

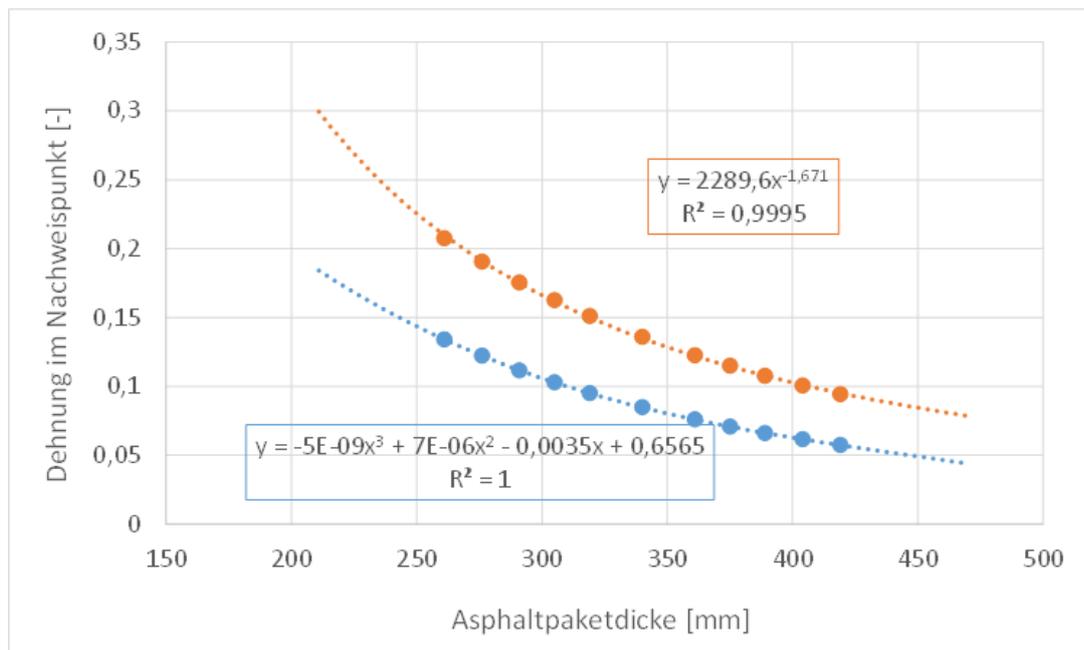


Bild 3.21: Zusammenhang zwischen Asphaltpaketdicke und zugehöriger radialer Dehnung am Nachweispunkt für einen ausgewählten Temperaturzustand (ncT = 4; TFO = 47,5 °C) und für zwei unterschiedliche Steifigkeitsklassen.

Alternativ- variante	Art der Funktionen	ncT-abhängige Funktion	Berücksichtigung welcher TFO-Klassen für Regression	Art der Funktionen	Berücksichtigung welcher E-Klassen bzw. D-Klassen für Regression	Anzahl Belastungs- sowie Material- eigenschafts- und Konstruktionszustände
V1	$\varepsilon(T)$ → Polynom 3. Grades	Ja	-12,5°C + 7,5°C +27,5°C + 47,5°C	$\varepsilon(E)$ → Potenz- funktion $\varepsilon(D)$ → Potenz- funktion	1, 8, 15	432
V2	$\varepsilon(T)$ → Polynom 3. Grades	Ja	-12,5°C + 7,5°C +27,5°C + 47,5°C	$\varepsilon(E)$ → Potenz- funktion $\varepsilon(D)$ → Potenz- funktion	1, 4, 8, 12, 15	1.200
V3	$\varepsilon(T)$ → Polynom 3. Grades	Ja	-12,5°C + 7,5°C +27,5°C + 47,5°C	$\varepsilon(E)$ → Potenz- funktion $\varepsilon(D)$ → Potenz- funktion	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15	3.072

Tabelle 3.5: Regressionsvarianten.

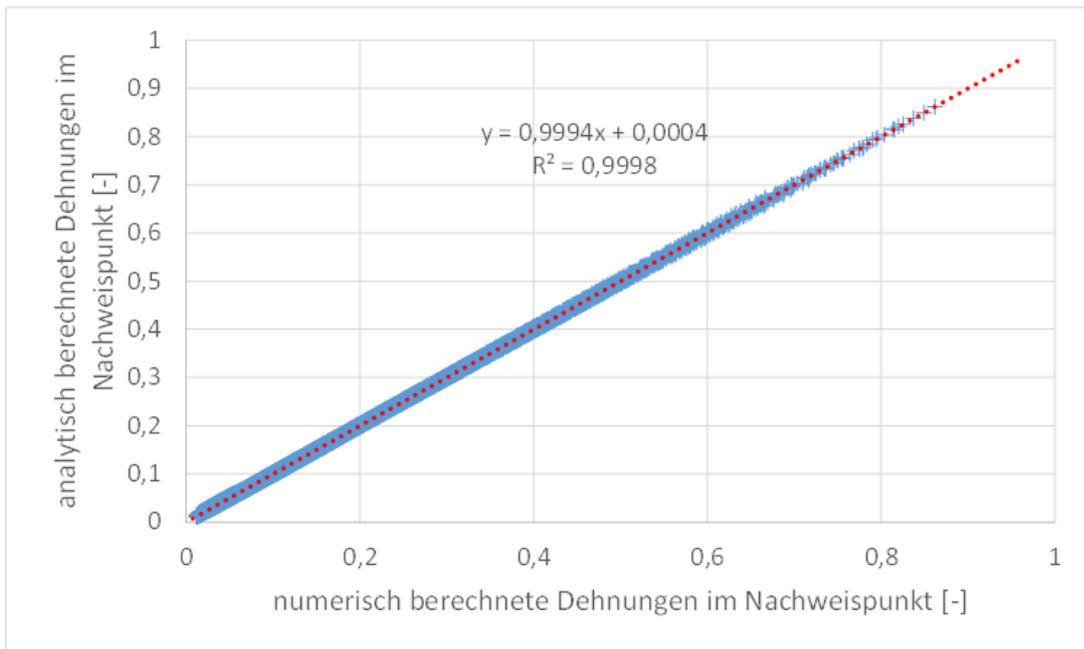


Bild 3.22: Gegenüberstellung der numerisch und der mit Hilfe der Regressionsgleichungen analytisch berechneten Dehnungen; beispielhaft für die ATS4 und der Variante V2 gemäß Tabelle 3.5.

Jahr	REF	ATS1_V1	ATS1_V2	ATS1_V3
1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
3	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
4	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%
5	0,09%	0,09%	0,09%	0,09%
6	0,19%	0,19%	0,19%	0,19%
7	0,49%	<b>0,41%</b>	<b>0,41%</b>	0,49%
8	0,81%	<b>0,69%</b>	<b>0,69%</b>	0,81%
9	1,22%	1,22%	1,22%	1,22%
10	1,69%	1,69%	1,69%	1,69%
11	2,68%	2,68%	2,68%	2,68%
12	3,61%	<b>3,28%</b>	<b>3,28%</b>	3,61%
13	4,43%	4,43%	4,43%	4,43%
14	6,29%	<b>5,34%</b>	<b>5,34%</b>	6,29%
15	6,29%	6,29%	6,29%	6,29%
16	9,18%	<b>7,83%</b>	<b>7,83%</b>	9,18%
17	9,56%	9,56%	9,56%	9,56%
18	10,58%	10,58%	10,58%	10,58%
19	12,35%	<b>11,45%</b>	12,35%	12,35%
20	14,50%	<b>12,78%</b>	<b>13,31%</b>	<b>13,31%</b>
21	15,95%	<b>14,74%</b>	<b>14,74%</b>	15,95%
22	16,00%	16,00%	16,00%	16,00%
23	17,14%	<b>16,81%</b>	<b>16,81%</b>	17,14%
24	20,07%	<b>18,55%</b>	<b>18,55%</b>	20,07%
25	21,02%	21,02%	21,02%	21,02%
26	22,64%	22,64%	22,64%	22,64%
27	23,23%	23,23%	23,23%	23,23%
28	25,11%	<b>23,23%</b>	<b>23,34%</b>	<b>25,13%</b>
29	26,87%	<b>26,44%</b>	26,87%	<b>25,13%</b>
30	26,87%	26,87%	26,87%	26,87%

Tabelle 3.6: Jährliche Ausfallwahrscheinlichkeiten (PD) für die Referenz- und Alternativvarianten für die ATS1 (fett gedruckt sind Unterschiede der PD).

Jahr	REF	ATS2_V1	ATS2_V2	ATS2_V3
1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
3	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
4	0,23%	0,23%	0,23%	0,23%
5	0,68%	0,68%	0,68%	0,68%
6	1,77%	<b>1,56%</b>	<b>1,56%</b>	1,77%
7	3,47%	<b>3,21%</b>	<b>3,21%</b>	<b>3,21%</b>
8	4,98%	4,98%	4,98%	4,98%
9	8,14%	<b>7,03%</b>	<b>7,81%</b>	8,14%
10	12,06%	<b>11,12%</b>	<b>11,12%</b>	<b>11,12%</b>
11	14,85%	<b>13,66%</b>	14,85%	<b>14,49%</b>
12	19,37%	<b>18,00%</b>	<b>18,00%</b>	<b>17,64%</b>
13	21,41%	21,41%	21,41%	21,41%
14	25,07%	<b>22,41%</b>	<b>22,41%</b>	25,07%
15	28,07%	28,07%	28,07%	28,07%
16	30,65%	<b>30,32%</b>	<b>30,32%</b>	30,65%
17	34,84%	<b>31,62%</b>	<b>31,62%</b>	<b>33,47%</b>
18	37,60%	37,60%	37,60%	37,60%
19	41,25%	<b>39,33%</b>	<b>39,33%</b>	<b>39,33%</b>
20	45,15%	<b>42,28%</b>	<b>42,28%</b>	<b>44,22%</b>
21	46,79%	<b>45,59%</b>	<b>45,59%</b>	46,79%
22	49,33%	<b>47,80%</b>	<b>47,80%</b>	49,33%
23	54,07%	<b>52,11%</b>	<b>52,11%</b>	<b>50,10%</b>
24	55,57%	55,28%	55,57%	55,57%
25	56,76%	56,76%	56,76%	56,76%
26	59,74%	<b>59,48%</b>	<b>59,48%</b>	<b>59,48%</b>
27	61,97%	<b>61,41%</b>	<b>61,41%</b>	61,97%
28	64,05%	64,05%	64,05%	64,05%
29	65,00%	<b>64,67%</b>	<b>64,67%</b>	65,00%
30	68,08%	68,08%	68,08%	<b>66,42%</b>

Tabelle 3.7: Jährliche Ausfallwahrscheinlichkeiten (PD) für die Referenz- und Alternativvarianten für die ATS2 (fett gedruckt sind Unterschiede der PD).

Jahr	REF	ATS3_V1	ATS3_V2	ATS3_V3
1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
3	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
4	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
5	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
6	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
7	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
8	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%
9	0,02%	0,02%	0,02%	0,02%
10	0,05%	0,05%	0,05%	<b>0,07%</b>
11	0,12%	0,12%	0,12%	0,12%
12	0,18%	0,18%	0,18%	0,18%
13	0,32%	<b>0,27%</b>	0,32%	0,32%
14	0,43%	<b>0,38%</b>	<b>0,38%</b>	0,43%
15	0,55%	0,55%	0,55%	0,55%
16	0,63%	0,63%	<b>0,72%</b>	<b>0,72%</b>
17	0,93%	0,93%	0,93%	<b>0,98%</b>
18	1,23%	<b>1,14%</b>	1,23%	1,23%
19	1,57%	<b>1,37%</b>	1,57%	1,57%
20	1,76%	1,76%	1,76%	1,76%
21	2,41%	<b>2,17%</b>	2,41%	2,41%
22	2,61%	<b>2,44%</b>	<b>2,53%</b>	<b>2,70%</b>
23	3,06%	3,06%	3,06%	3,06%
24	3,43%	<b>3,06%</b>	<b>3,14%</b>	3,43%
25	4,12%	4,12%	4,12%	4,12%
26	4,89%	<b>4,19%</b>	4,89%	4,89%
27	5,39%	5,39%	5,39%	5,39%
28	6,31%	<b>5,44%</b>	<b>5,44%</b>	6,31%
29	6,55%	6,55%	6,55%	6,55%
30	7,80%	<b>6,58%</b>	<b>6,58%</b>	<b>7,36%</b>

Tabelle 3.8: Jährliche Ausfallwahrscheinlichkeiten (PD) für die Referenz- und Alternativvarianten für die ATS3 (fett gedruckt sind Unterschiede der PD).

Jahr	REF	ATS4_V1	ATS4_V2	ATS4_V3
1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
2	0,01%	0,01%	0,01%	0,01%
3	0,12%	0,12%	<b>0,15%</b>	<b>0,15%</b>
4	0,60%	<b>0,50%</b>	<b>0,68%</b>	<b>0,68%</b>
5	1,52%	<b>1,19%</b>	<b>1,35%</b>	1,52%
6	2,55%	2,55%	<b>2,90%</b>	2,55%
7	4,72%	<b>4,02%</b>	<b>4,46%</b>	<b>4,46%</b>
8	6,95%	<b>6,51%</b>	<b>7,01%</b>	<b>7,01%</b>
9	9,62%	<b>9,09%</b>	9,62%	<b>9,09%</b>
10	12,26%	12,26%	12,26%	12,26%
11	15,35%	<b>14,85%</b>	15,35%	<b>14,85%</b>
12	19,37%	<b>18,00%</b>	<b>18,00%</b>	<b>19,01%</b>
13	21,41%	<b>19,88%</b>	<b>19,88%</b>	21,41%
14	23,31%	<b>22,36%</b>	<b>22,41%</b>	<b>25,07%</b>
15	28,02%	<b>27,45%</b>	<b>27,70%</b>	<b>27,09%</b>
16	28,85%	28,85%	28,85%	28,85%
17	31,27%	<b>30,32%</b>	<b>30,32%</b>	31,27%
18	34,75%	<b>35,04%</b>	<b>36,50%</b>	34,75%
19	37,51%	<b>36,50%</b>	<b>36,95%</b>	37,51%
20	38,95%	<b>37,51%</b>	<b>37,60%</b>	38,95%
21	42,12%	<b>40,97%</b>	<b>41,25%</b>	<b>43,88%</b>
22	44,98%	<b>42,28%</b>	<b>44,05%</b>	44,98%
23	45,59%	<b>45,42%</b>	<b>45,42%</b>	<b>46,79%</b>
24	48,99%	<b>46,79%</b>	<b>46,79%</b>	<b>48,49%</b>
25	51,85%	<b>51,18%</b>	<b>51,18%</b>	<b>49,16%</b>
26	55,28%	<b>51,94%</b>	<b>52,11%</b>	<b>54,84%</b>
27	55,28%	<b>53,64%</b>	55,28%	<b>55,57%</b>
28	56,50%	<b>55,57%</b>	56,50%	56,50%
29	59,39%	<b>56,50%</b>	<b>56,60%</b>	<b>59,22%</b>
30	59,48%	<b>59,22%</b>	<b>59,48%</b>	59,48%

Tabelle 3.9: Jährliche Ausfallwahrscheinlichkeiten (PD) für die Referenz- und Alternativvarianten für die ATS4 (fett gedruckt sind Unterschiede der PD).

	V1	V2	V3
ATS1	1,0%	0,5%	0,2%
ATS2	0,9%	0,5%	0,2%
ATS3	1,1%	0,5%	0,1%
ATS4	1,4%	0,3%	-0,4%

Tabelle 3.10: Relativer Unterschied der Schadenssummen zwischen der Referenz- und den Alternativvarianten.

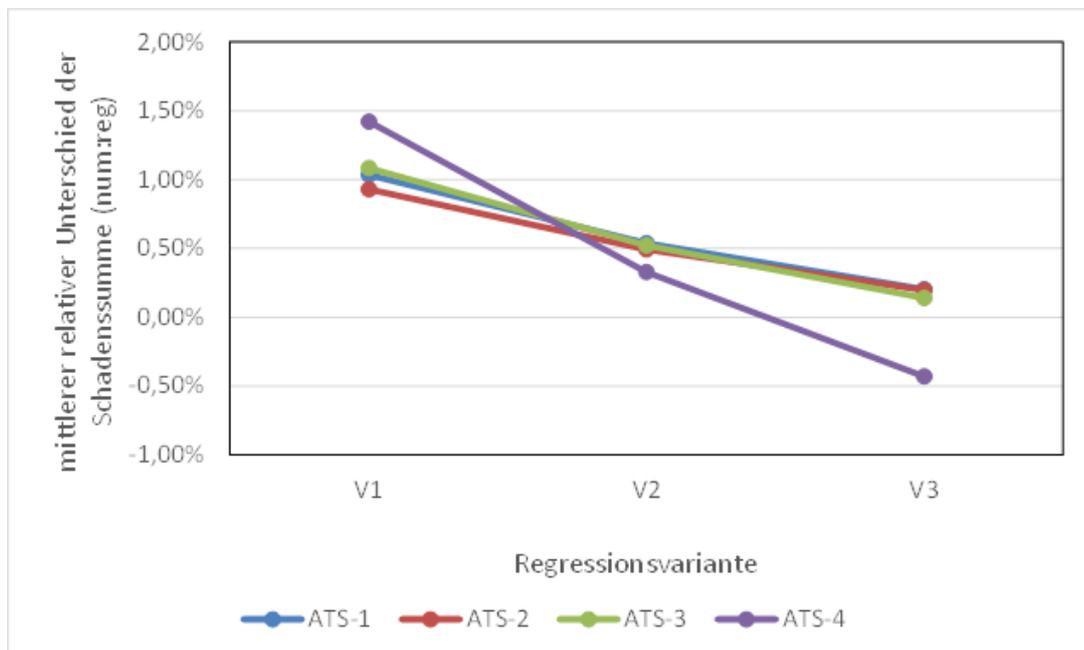


Bild 3.23: Relative Unterschiede der Schadenssummen der Referenzvariante im Vergleich zu den Schadenssummen der drei untersuchten Regressionsvarianten gemäß Tabelle 3.5 (jeweils Mittelwert der 225 Materialparameter- und Konstruktionsvarianten).

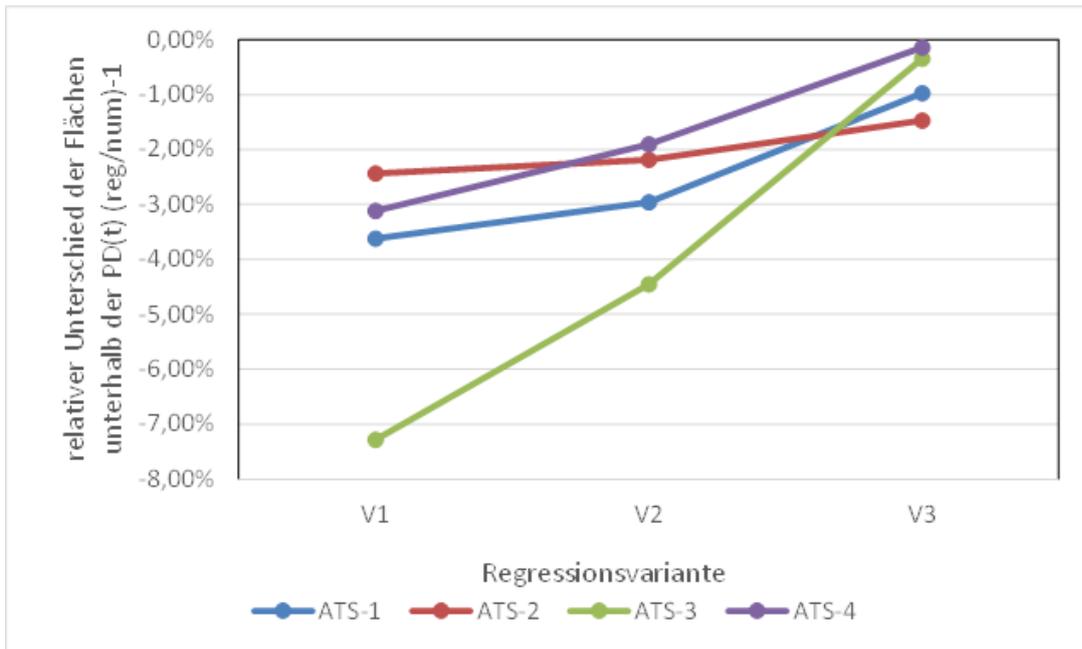


Bild 3.24: Relative Unterschiede der Flächen unterhalb der Ganglinie der Ausfallwahrscheinlichkeit zwischen der Referenzvariante und den drei untersuchten Regressionsvarianten gemäß Tabelle 3.5.

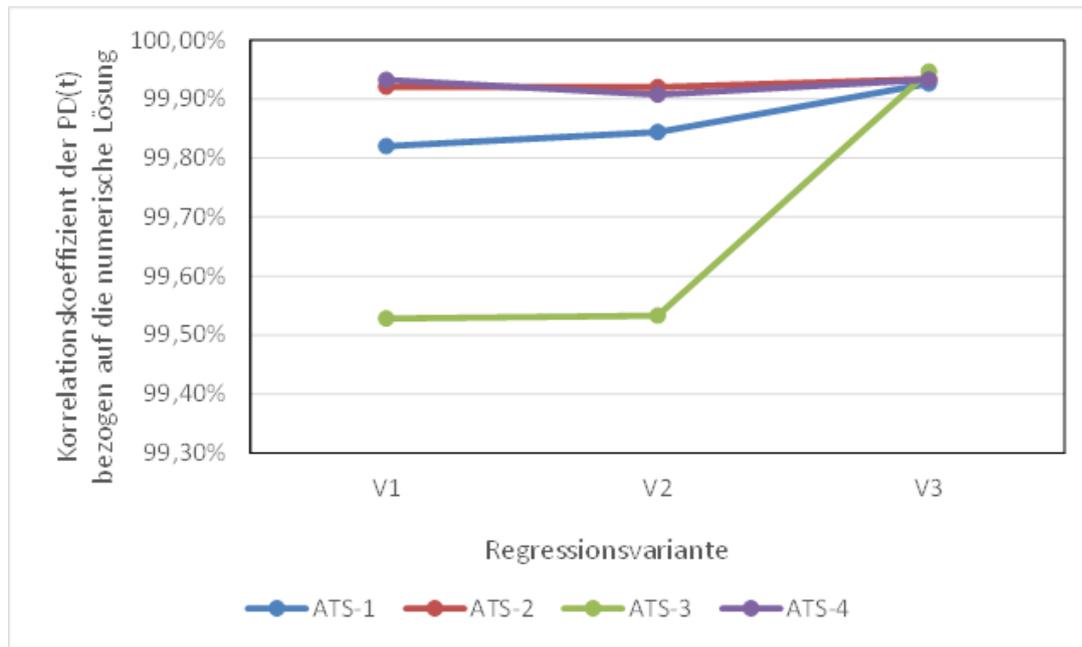


Bild 3.25: Korrelationskoeffizient der Ganglinien der Ausfallwahrscheinlichkeit zwischen der Referenzvariante und den drei untersuchten Regressionsvarianten gemäß Tabelle 3.5.

## 4 AP 400: Ableitung eines vereinfachten analytisch-deterministischen Rechenkerns

Bei der Bearbeitung des Forschungsprojektes ist die Programmierung von zeit- und ressourceneffizienten Berechnungsalgorithmen eines der wichtigsten Hauptaugenmerke. Sie beeinflusst maßgeblich die Handhabbarkeit und Anwendbarkeit des finalen Programmes. Trotz dieses Wissens und der entsprechenden Bemühungen benötigen bestimmte Berechnungsmodelle und Modellannahmen einen Berechnungsaufwand, welcher bei hundert- und tausendfacher Ausführung für die verschiedenen Belastungssituationen dazu führen, dass die alltägliche Anwendung dies Programmes nicht praktikabel ist.

Aus diesem Grund wurde die Nutzung eines vereinfachten analytisch-deterministischen Rechenkerns vorgeschlagen, welcher aufgrund seiner einschränkenden Modellannahmen bezüglich der Geometrie der Befestigungen, der Belastungen, des Schichtenverbundes und der Materialien sehr schnell entsprechende Belastungssituationen berechnen kann. Dadurch wird das Programm zeitlich anwendungsfreundlicher - natürlich mit der Einschränkung, dass sich dies auf die Qualität der Ergebnisse niederschlägt.

Um die Auswirkungen der vereinfachten Modellannahmen auf die Ergebnisse der Berechnungen quantifizieren zu können, wurden entsprechende Vergleichsrechnungen durchgeführt. Mit deren Hilfe kann abgeschätzt werden, ob und unter welchen Voraussetzungen der vereinfachte analytisch-deterministische Rechenkern qualitativ verwertbare Ergebnisse erzeugt.

### 4.1 Viskoelastisches Materialverhalten und dynamische Belastung von Asphaltsschichten

Das Materialverhalten von Asphaltsschichten wird in der Mehrschichtentheorie derzeit mit Hilfe von linear elastischen Ansätzen berücksichtigt. Hierzu wird i.d.R. der Betrag des komplexen Asphaltmoduls bei einer Frequenz von 10 Hz näherungsweise als E-Modul

verwendet. Um die Auswirkungen der Verwendung eines viskoelastischen Materialmodells und einer dynamischen Belastung auf die Ergebnisse für eine Asphaltkonstruktion zu bestimmen, wurden die Ergebnisse des analytisch-deterministischen Rechenkerns mit denen eines Programmes verglichen, welches auf der in Frankreich entwickelten Software *ViscoRoute* basiert.

#### 4.1.1 Theoretische Grundlagen

Das Programm, das bei den Vergleichsrechnungen zur Anwendung kam, verwendet das mathematisch mechanische Modell, welches von Chabot, Chupin u. a. (2010) und Chupin u. a. (2010) vorgeschlagen wurde.

In diesem beschriebenen Modell wurde der viskoelastische und thermorheologische 2S2P-Ansatz von Huet (1965) und Sayegh (1965) implementiert. Wie in Bild 4.1 erkennbar ist, besteht dieser aus zwei parallelen Ästen. Der erste Ast beinhaltet eine Feder und zwei Dämpfer und beschreibt sowohl das spontane, als auch das verzögerte Verhalten der Elastizität des Asphalts. Der zweite Ast dagegen besteht nur aus einer Feder und repräsentiert die Langzeitelastizität des Asphalts. Der resultierende Komplexmodul  $E^*$  ist dabei abhängig von der Frequenz  $\omega$  und der Temperatur  $\theta$  (Gleichung 4.1).

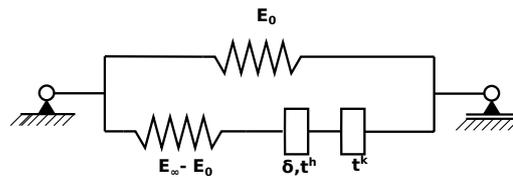


Bild 4.1: Schematische Darstellung des Huet-Sayegh-Modells

$$E^*(\omega, \theta) = E_0 + \frac{E_\infty - E_0}{1 + \delta(i\omega(e^{A_0+A_1\theta+A_2\theta^2}))^{-k} + (i\omega(e^{A_0+A_1\theta+A_2\theta^2}))^{-h}}, \quad (4.1)$$

Dieses kompakte Modell eignet sich sehr gut für die Verwendung von Modellen, die auf der Mehrschichtentheorie basieren. Es besteht durch die im Vergleich recht geringe Anzahl an Parametern bei gleichzeitig exzellenten Anpassungsmöglichkeiten (Pronk 2005). Allerdings eignet es sich im Gegensatz zum generalisierten Maxwell-Modell nur sehr eingeschränkt für die Implementierung in einen FE-Code, da die fraktionalen Ableitungen die Kenntnis der gesamten Spannungshistorie an jedem Integrationspunkt erfordern. Das generalisierte Maxwell-Modell benötigt nur einen Wert aus dem vorigen Zeitinkrement.

Hierzu Oeser und Pellinen (2012, S. 153):

To determine the inner variable, [...] knowledge of the entire stress history (i.e. knowledge of all previous stress increments) is required. This significantly restricts the applicability of fractional rheological elements for numerical analysis since the provision of all previous stress increments slows down the computation and requires extensive memory space.

Schmidt und Gaul (2002, S. 54) kommen zum gleichen Schluss: „However, it has to be mentioned that, due to the non-locality of fractional derivatives, the storage requirements and the numerical costs increase significantly.“

Mit steigender Anzahl an Maxwell-Armen sollte das generalisierte Maxwell-Modell das Verhalten des Huet-Sayegh-Modells abbilden können (Xu und Solaimanian 2009; Woldekidan u. a. 2012). Die dazu üblicherweise hohe Anzahl an notwendigen Maxwell-Armen führt zu einer Schlechtgestelltheit des Problems der Parameteridentifikation. Um dennoch zu einem tauglichen Parametersatz zu gelangen, können Methoden zur Stabilisierung verwendet werden. Siehe hierzu Neumann, Simon, Mollenhauer u. a. (2017, Kapitel 2.2) und die darin enthaltenen Referenzen.

#### 4.1.2 Numerische Anwendung

Mithilfe der numerischen Anwendungen sollen die Ergebnisse der statischen und dynamischen Berechnungen quantitativ miteinander verglichen werden. Dabei wurden die Ergebnisse hinsichtlich des Schadensmechanismus der Ermüdungsrisssbildung untersucht.

#### Eingabedaten

Die Berechnungsparameter der Vergleichsrechnungen lauteten wie folgt:

- Schichtenaufbau: Der Straßenaufbau besteht aus sechs Schichten, wobei die drei Asphaltsschichten in insgesamt 26 Subsschichten unterteilt sind. In Bild 4.2 sind die Konstruktionsparameter der einzelnen Schichten zu sehen.
- Materialien: Die Asphaltsschichten (Schicht 1 bis 3) wurden mit dem Huet-Sayegh-Modell (Bild 4.1) modelliert, die ungebundenen Schichten wurden als linear-elastisch betrachtet. Die jeweiligen Materialeigenschaften sind in Bild 4.2 und Tabelle 4.1 zu finden.
- Verkehrsbelastung: Die Verkehrsbelastung wurde mit einer Achslast von 10 t angenommen. Gemäß den RDO Asphalt 09 (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009) ist die Lasteinleitungsfläche kreisförmig mit einem Radius von 150 mm. Somit ergibt sich für die Einzelradlast ein flächenmäßig konstanter Druck von 0,7 MPa.

- Geschwindigkeit (für die dynamische Belastung): Die Verkehrsbelastung wurde mit einer konstanten Geschwindigkeit von  $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  modelliert.
- Schichtenverbund: Der Schichtenverbund wurde entsprechend den RDO Asphalt 09 (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009) gestaltet, also mit vollem Verbund zwischen den Asphalt- und vollständig aufgelöstem Verbund zwischen den restlichen Schichten (siehe Bild 4.2).
- Temperatur: Es wurden drei verschiedene Temperaturszenarien untersucht - eine niedrige ( $-12,5 \text{ }^\circ\text{C}$ ), eine mittlere ( $22,5 \text{ }^\circ\text{C}$ ) und eine hohe Oberflächentemperatur ( $47,5 \text{ }^\circ\text{C}$ ). Der Temperaturverlauf innerhalb der Konstruktion entspricht dem Modell der RDO Asphalt 09 (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009) und ist in Bild 4.3 zu sehen. Aufgrund des vertikalen Temperaturverlaufs ist die Steifigkeit innerhalb der Asphalt-schichten nicht konstant. Um diesen Umstand zu berücksichtigen, wurden die Asphalt-schichten in Sub-schichten mit einer jeweiligen Dicke von 10 mm unterteilt (siehe Bild 4.4) und jeder Sub-schicht die Temperatur und somit auch die Steifigkeit der Schichtmitte zugeordnet.

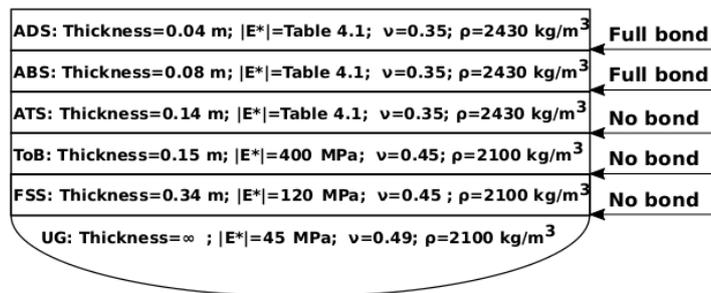


Bild 4.2: Schichtenaufbau, Materialparameter und Schichtenverbund des Berechnungsmodells der Vergleichsrechnungen

Material	$E_0$ [MPa]	$E_\infty$ [MPa]	$\delta$ [-]	$k$ [-]	$h$ [-]	$A_0$ [-]	$A_1$ [-]	$A_2$ [-]
ADS	11,0	32 665,0	2,240	0,190	0,590	2,9430	-0,3974	0,001 95
ABS	13,0	43 934,0	2,100	0,170	0,530	5,945	-0,3996	0,001 07
ATS	31,0	38 814,0	1,872	0,178	0,497	2,5320	-0,3994	0,001 75

Tabelle 4.1: Materialparameter

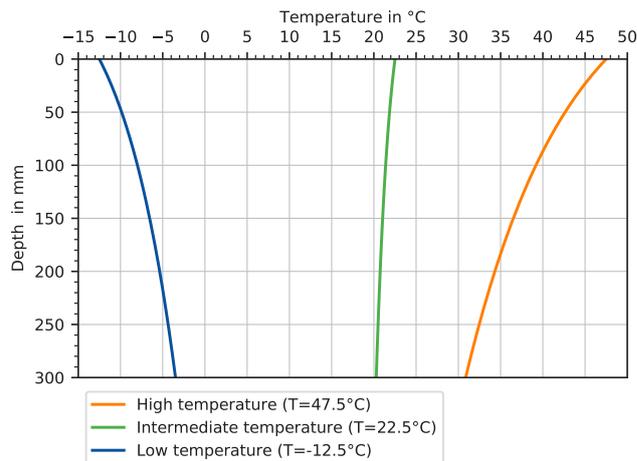


Bild 4.3: Temperaturverlauf

### 4.1.3 Ergebnisse

Die Ergebnisse der Vergleichsrechnungen sind in Bild 4.5 grafisch dargestellt und sie zeigen, dass die quantitativen Unterschiede zwischen dem statisch linear-elastischen und dynamisch viskoelastischen Materialmodell größer werden, je höher die Temperatur wird. Bei der Temperatur von  $-12,5^{\circ}\text{C}$  sind die Werte der horizontalen Dehnung im Verlauf annähernd gleich, wohingegen bei  $47,5^{\circ}\text{C}$  - bei der dynamischen Belastung - eine deutlich Deformation des horizontalen Dehnungsverlaufs in Fahrtrichtung erkennbar ist.

Da mit einer bestimmten Fahrgeschwindigkeit auch eine gewisse Belastungsfrequenz einhergeht, wurden diesbezüglich ebenfalls Untersuchungen angestellt. Dabei stellte sich heraus, dass sich die Belastungsfrequenz, bei der das statisch linear-elastische Modell die gleichen Dehnungen liefert wie das dynamisch viskoelastische Modell, temperaturabhängig verhält (siehe Bild 4.6). Um mit dem statisch linear-elastischen Modell die gleichen Ergebnisse zu erzeugen, wie mit dem dynamisch viskoelastischen Ansatz, muss die Frequenz zur Bestimmung der Asphaltsteifigkeit temperaturabhängig geändert werden. In Bild 4.6 wäre das bei  $-12,5^{\circ}\text{C}$  und 4 Hz, bei  $22,5^{\circ}\text{C}$  und 5 Hz sowie bei  $47,5^{\circ}\text{C}$  und 8 Hz der Fall. Des Weiteren entfernt sich das Maximum der horizontalen Dehnungen mit steigender Temperatur vom Mittelpunkt der darüber liegenden Lasteinleitungsfläche.

### Berechnungszeit

Um die Richtigkeit der Berechnungsergebnisse sicherzustellen, wurden Validierungen hinsichtlich verschiedener Veröffentlichungen und den darin enthaltenen Berechnungsmodellen durchgeführt. Anhand dieser Validierungsrechnungen ist erkennbar, wie die

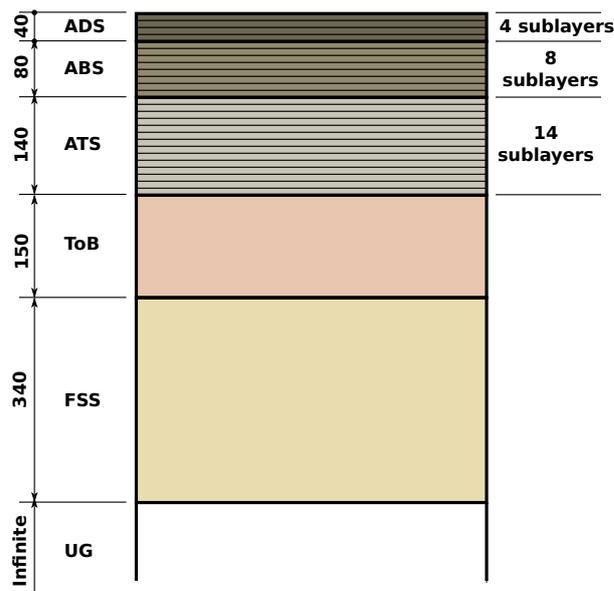
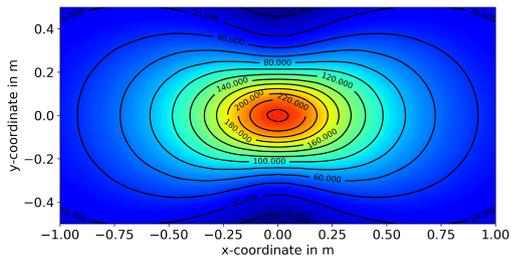


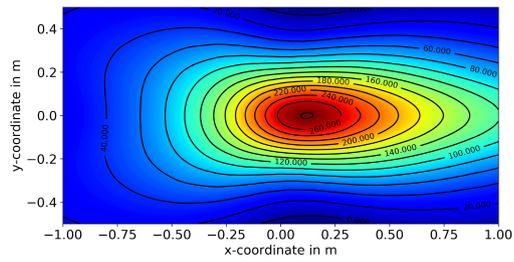
Bild 4.4: Schichtenaufbau mit Subschichten

Berechnungsdauer der Ergebnisse von der Komplexität des verwendeten Materialmodells abhängt (siehe Abschnitt 4.1.2). Folgende Veröffentlichungen bzw. Modelle wurden dabei für die Validierung verwendet:

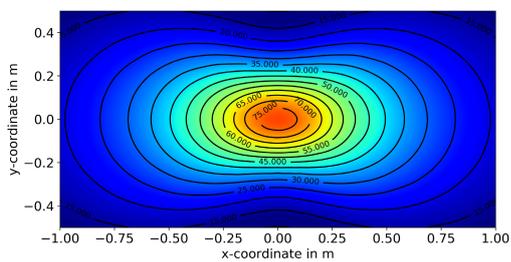
- Validierung statisch, linear-elastische Analyse nach Liu, Xing, Dong u. a. (2017)
  - Schichtenaufbau: 6 Schichten (ADS - ABS - ATS - ToB - FSS - UG)
  - Materialien: linear elastisch
  - Verkehrsbelastung: Druck von 0,7 MPa auf quadratischer Fläche mit Kantenlänge 264 mm
  - Schichtenverbund: Voller Verbund zwischen Asphaltsschichten, sonst vollständig aufgelöster Verbund
- Validierung dynamische Analyse nach Liu, Xing, Wang u. a. (2017)
  - Schichtenaufbau: 6 Schichten (ADS - ABS - ATS - ToB - FSS - UG)
  - Materialien: linear elastisch
  - Verkehrsbelastung: Druck von 0,7 MPa auf quadratischer Fläche mit Kantenlänge 300 mm
  - Geschwindigkeit: vier Geschwindigkeiten von  $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ,  $52 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ,  $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  und  $110 \frac{\text{km}}{\text{h}}$



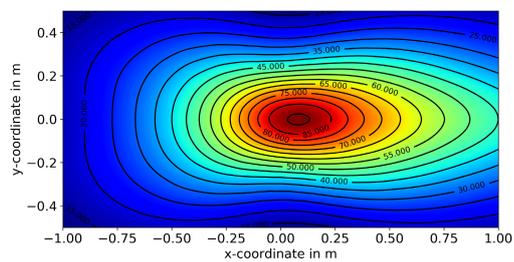
(a) Statische Belastung mit linear-elastischem Materialmodell, E-Modul bei einer Frequenz von 10 Hz und einer Oberflächentemperatur von 47,5 °C.



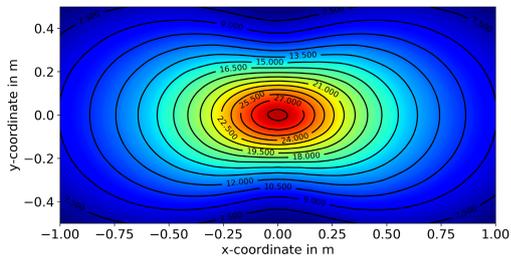
(b) Dynamische Belastung mit viskoelastischem Materialmodell, bei einer Geschwindigkeit von 80  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  und einer Oberflächentemperatur von 47,5 °C.



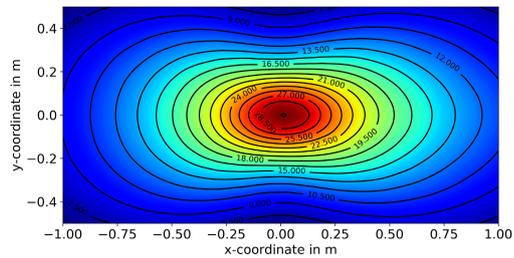
(c) Statische Belastung mit linear-elastischem Materialmodell, E-Modul bei einer Frequenz von 10 Hz und einer Oberflächentemperatur von 22,5 °C.



(d) Dynamische Belastung mit viskoelastischem Materialmodell, bei einer Geschwindigkeit von 80  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  und einer Oberflächentemperatur von 22,5 °C.

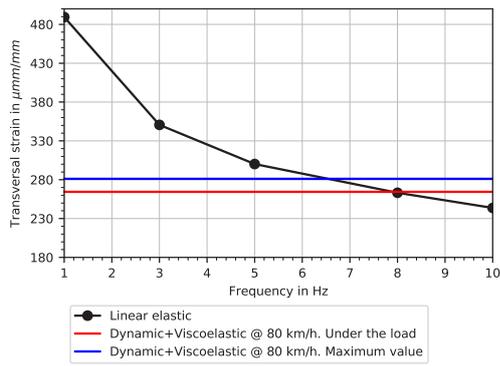


(e) Statische Belastung mit linear-elastischem Materialmodell, E-Modul bei einer Frequenz von 10 Hz und einer Oberflächentemperatur von -12,5 °C.

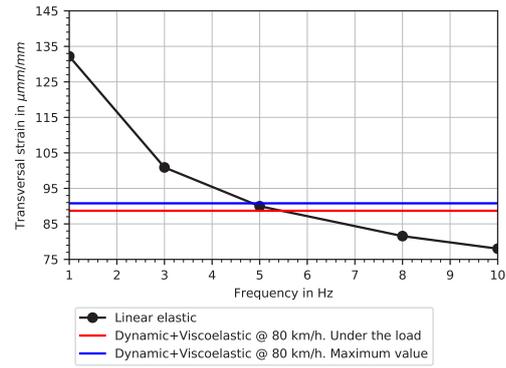


(f) Dynamische Belastung mit viskoelastischem Materialmodell, bei einer Geschwindigkeit von 80  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  und einer Oberflächentemperatur von -12,5 °C.

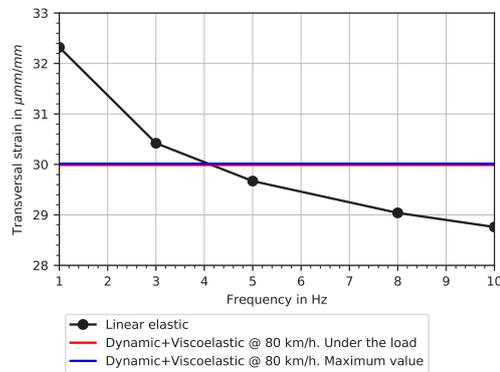
Bild 4.5: Horizontale Dehnungen  $[\frac{\mu\text{m}}{\text{m}}]$  and der Unterseite der Asphalttragschicht bei den untersuchten Oberflächentemperaturen von 47,5 °C (oben), 22,5 °C (mitig) und -12,5 °C (unten). Die Fahrtrichtung ist nach links.



(a) Horizontalen Dehnungen an der Unterseite der Asphalttragschicht bei einer Oberflächentemperatur von 47,5 °C.



(b) Horizontalen Dehnungen an der Unterseite der Asphalttragschicht bei einer Oberflächentemperatur von 22,5 °C.



(c) Horizontalen Dehnungen an der Unterseite der Asphalttragschicht bei einer Oberflächentemperatur von -12,5 °C.

Bild 4.6: Vergleich der horizontalen Dehnungen an der Unterseite der Asphalttragschicht der statisch linear-elastischen und dynamisch viskoelastischen Analyse bei den untersuchten Oberflächentemperaturen von 47,5 °C (links oben), 22,5 °C (rechts oben) und -12,5 °C (unten).

- Schichtenverbund: Voller Verbund zwischen Asphaltsschichten, sonst vollständig aufgelöster Verbund
- Validierung viskoelastische Analyse nach Chabot, Tamagny u. a. (2006)
  - Schichtenaufbau: unendlicher Halbraum
  - Materialien: linear thermo-viskoelastisch
  - Verkehrsbelastung: Druck von 0,662 MPa auf quadratischer Fläche mit Kantenlänge 220 mm
  - Geschwindigkeit: eine Geschwindigkeit von  $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
  - Temperatur: 15 °C
- Validierung dynamische, viskoelastische Analyse nach Chabot, Chupin u. a. (2010)
  - Schichtenaufbau: 4 Schichten (ADS - ABS - ATS - UG)
  - Materialien: Asphalt linear viskoelastisch, Boden linear elastisch
  - Verkehrsbelastung: Druck von 0,878 MPa auf quadratischer Fläche mit Kantenlänge 220 mm
  - Geschwindigkeit: eine Geschwindigkeit von  $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
  - Temperatur: zwei Temperaturen von 20 °C und 30 °C
  - Schichtenverbund: Voller Verbund zwischen allen Schichten

Die Berechnungen wurden auf einem Ubuntu-System (Ubuntu 18.04.3 LTS) mit einer Intel<sup>®</sup>-Core<sup>™</sup>-i7-8550U-CPU (@ 1,80 GHz), 8 GB Arbeitsspeicher und unparallelisiert durchgeführt. In Tabelle 4.2 sind die Berechnungszeiten für die verschiedenen Validierungsmodelle sowie dem in Abschnitt 4.1.2 beschriebenen Berechnungsmodell dargestellt.

In Tabelle 4.2 ist erkennbar, dass die Berechnungszeit mit steigender Komplexität des Materialmodells zunimmt. Einen deutlich größeren Einfluss haben allerdings die Anzahl der Schichten im Schichtenaufbau (29 Schichten bei der numerischen Anwendung - vgl. Zeit zum Lösen des Gleichungssystems) und die Anzahl der Nachweispunkte (301 Nachweispunkte bei Validierung 1 - vgl. Zeit zum Bestimmen der Verschiebungen, Spannungen und Dehnungen).

Validierung 1	Validierung 2	Validierung 3	Validierung 4	numerische Anwendung
Einlesen der Eingabedatei				
$1,58 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$4,24 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$8,83 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$1,21 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$3,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
Lösen des Gleichungssystems				
68,23 s	70,82 s	43,42 s	59,74 s	200,24 s
Anzahl der Nachweispunkte				
305	4	82	161	5
Bestimmung der Verschiebungen, Spannungen und Dehnungen				
53,68 s	0,99 s	22,81 s	33,98 s	1,25 s
Schreiben der Ausgabedatei				
$4,77 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$3,91 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$4,77 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$2,67 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$4,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
Berechnungszeit gesamt				
121,94 s	71,81 s	66,24 s	93,73 s	201 s

Tabelle 4.2: Dauer der Berechnungszeiten der verschiedenen Validierungsmodelle im Vergleich zur numerischen Anwendung gemäß den RDO Asphalt 09 (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009).

## 4.2 Nichtlineares Materialverhalten von Tragschichten ohne Bindemittel

Ungebundene Straßenbaustoffe weisen i. d. R. ein nichtlineares Materialverhalten auf. Nichtlineares elastisches Verformungsverhalten kann hier durch spannungsabhängige Materialkenngrößen beschrieben werden. Diese spannungsabhängigen Materialkenngrößen wiederum können durch nichtlinear elastische Stoffmodelle nachgebildet und in verschiedene Berechnungsalgorithmen implementiert werden. Besonders nennenswert ist das Dresdner Modell.

### 4.2.1 Dresdner Modell

Die ursprüngliche Entwicklung des Dresdner Modells (Abschnitt 2.4) erfolgte unter Annahme eines homogenen Spannungszustandes, wie er unter Bedingungen im Triaxialversuch erwartet werden kann. Eine Anwendung des Stoffmodelles für Berechnungsmodelle, in denen örtlich begrenzte Lasten aufgebracht werden, wie es bei der Nachbildung des Plattendruckversuchs oder eines Befestigungsaufbaus unter Verkehrslast der Fall ist, erfordert die Umrechnung der im Stoffmodell berücksichtigten Spannungen in Spannungen, die auch inhomogene Spannungszustände repräsentieren können.

Inhomogene Spannungszustände wiederum können dazu führen, dass im Berechnungsmodell Zugbeanspruchungen auftreten, für die das Dresdner Modell nicht definiert ist. Das Dresdner Stoffmodell ist somit für den nicht definierten Gültigkeitsbereich entsprechend zu erweitern. Durch solch eine Erweiterung können in ungebundenen Tragschichten auftretende Zugbeanspruchungen deutlich reduziert werden. Neben der Stoffmodellerweiterung besteht außerdem die Möglichkeit, durch verschiedene Implementierungen im Berechnungsprogramm lokal Zugbeanspruchungen auf ein definiertes Minimum zu reduzieren. Hierbei gilt es jedoch genau zu prüfen, inwieweit die getroffenen Annahmen und die daraus resultierenden Änderungen der maßgebenden Materialkenngrößen überhaupt physikalisch sinnvoll sind.

Bei der Einbindung des Dresdner Modells sind verschiedene Aspekte zu berücksichtigen, um verlässliche Ergebnisse bei vertretbarer Rechenzeit zu erzeugen. Einige Ausführungen hierzu können Abschnitt 4.2.3 entnommen werden.

### 4.2.2 Vergleich von Berechnungsergebnissen bei Annahme linearen und nichtlinearen Materialverhaltens

Die Evaluierung von Modellparametern zur Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens unterschiedlicher Straßenbaustoffe erfolgt i. d. R. anhand von Ergebnissen aus Triaxialversuchen. Für jedes Material lässt sich in Abhängigkeit des verwendeten

Stoffmodells ein Parametersatz bestimmen, auf dessen Grundlage eine Stoffmodellgröße, wie beispielsweise der Steifigkeitsmodul, spannungsabhängig berechnet werden kann.

Zur Validierung der Einbindung nichtlinearer Stoffmodelle in Berechnungsprogramme empfiehlt sich folglich die Modellierung des Triaxialversuchs zur Simulation einzelner Belastungszustände aus dem Triaxialversuch. Im Ergebnis erhält man ebenfalls spannungsabhängige Stoffmodellgrößen, die den analytischen Ergebnissen (direkt berechnet aus Modellparametern) gegenüber gestellt werden können. Wurde das nichtlineare Stoffmodell exakt eingebunden, so sollten die unterschiedlich bestimmten Stoffmodellgrößen identisch sein.

Zur Bewertung der Notwendigkeit der Berücksichtigung nichtlinear elastischen Materialverhaltens ungebundener Straßenbaustoffe wurde das Dresdner Modell zuzüglich notwendiger Erweiterungen in das Finite-Elemente Programm **COMSOL Multiphysics** eingebunden. Die korrekte Implementierung konnte gemäß beschriebener Vorgehensweise bestätigt werden.

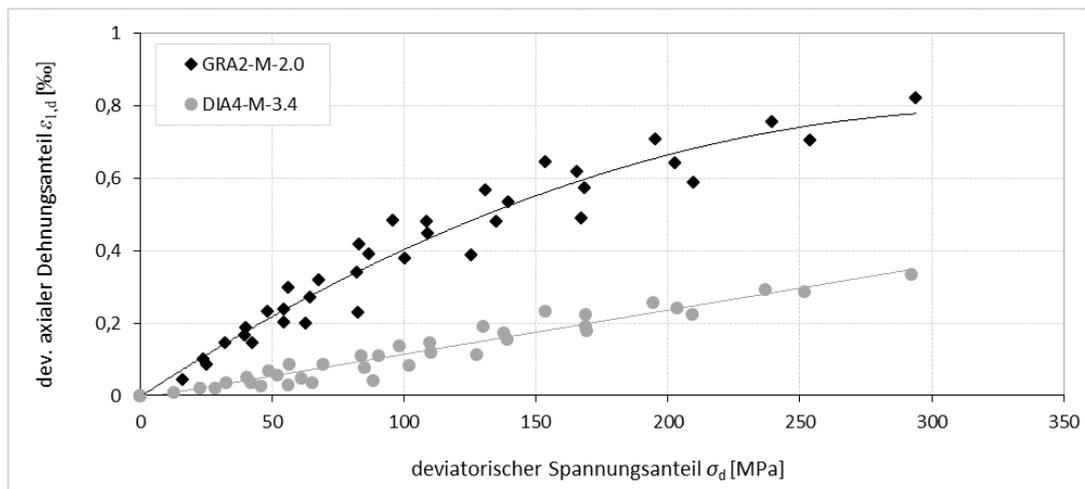


Bild 4.7: Zusammenhang zwischen deviatorischen Dehnungsanteilen in axialer Richtung  $\epsilon_{1,d}$  und deviatorischen Spannungsanteilen  $\sigma_d$  des Gesamtsystems für die ausgewählten Gesteinskornmischungen Granodiorit GRA2-M-2.0 und Diabas DIA4-M-3.4

Für die nachfolgenden Betrachtungen wurden zwei sich deutlich in ihrem mechanischen Verhalten unterscheidende granulare Materialien aus den von Numrich (2003) durchgeführten Untersuchungen ausgewählt. Bild 4.7 zeigt für beide Materialien (ein Granodiorit und ein Diabas) die im Versuch gemessenen vertikalen Dehnungsanteile in Abhängigkeit unterschiedlicher triaxialer Beanspruchungszustände. Die verwendeten Materialbezeichnungen entsprechen denen von Numrich (2003) festgelegten Kennungen. Die Parametersätze für das Dresdner Stoffmodell zur Beschreibung spannungs-

abhängigen Steifigkeits- und Querdehnverhaltens wurden hingegen neu bestimmt und sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst.

Kenngröße	Modellparameter allg.		Modellparameter berechnet	
			GRA2-M-2.0	DIA4-M-3.4
$E_{DM}$ [kPa]	$Q$	[kPa $^{(1-Q_2)}$ ]	9365,4965	45 511,7039
	$C$	[kPa $^{(1-Q_1-Q_2)}$ ]	1058,9823	9823,1624
	$Q_1$	[-]	0,597 604	0,230 584
	$Q_2$	[-]	1/3	1/3
	$D$	[kPa]	0,00	0,00
$\nu_{DM}$ [-]	$R$	[-]	0,039 830	0,052 697
	$A$	[ $\frac{1}{kPa}$ ]	-0,011 410	-0,000 807
	$B$	[-]	0,307 605	0,296 593

Tabelle 4.3: Parametersätze für das Dresdner Stoffmodell zur Beschreibung spannungsabhängigem Steifigkeits- ( $E_{DM}$ ) und Querdehnverhalten ( $\nu_{DM}$ ) ermittelt aus den Versuchsdaten der Granodioritprobe GRA2-M-2.0 und der Diabasprobe DIA4-M-3.4.

Um nun vergleichende Berechnungen bei Annahme linearen und nichtlinearen Materialverhaltens durchführen zu können, müssen geeignete Berechnungsmodelle erstellt werden. Das heißt, die Materialkenngrößen Steifigkeitsmodul und Querdehnzahl zur Beschreibung des Materialverhaltens granularer Straßenbaustoffe bei Annahme linear elastischen Verhaltens müssen die spannungsabhängigen äquivalenten Größen angepasst werden. Dies kann als Kalibrierung des Berechnungsmodells basierend auf linearen Materialkenngrößen verstanden werden. Solch eine Kalibrierung erfordert jedoch vorab die Definition einer Kalibriergröße, über die die Äquivalenz der zu vergleichenden Modelle bestimmt wird. Als Kalibriergröße sind Einsenkungen, Spannungen aber auch Dehnungen denkbar.

Für die vorliegenden Untersuchungen wurden zunächst die von Wellner (1993) dargelegten Berechnungen verifiziert, bevor sie anschließend durch Einbeziehen zusätzlicher Modellannahmen erweitert wurden. Grundlage bildete die Modellierung eines großmaßstäblichen Versuchsstandes zur Durchführung von Plattendruckversuchen mit den Abmaßen 1,5 m  $\times$  1,5 m. Die Randausbildung wurde daher als fest eingespannt angenommen. Bei Verwendung eines rotationssymmetrischen Modells ergibt sich somit ein Modellradius von 1,5 m. Um eine Lasteinleitung zu simulieren, die der Beanspruchung durch einen Fahrzeugreifen ähnelt, wurde eine Lasteinleitungsfläche mit einem Radius von 15 cm gewählt. Die aufgebrachte Belastung (gleich dem vorhandenen Reifenkontaktndruck) wurde als Flächenlast mit 0,707 MPa angesetzt. Dies entspricht einer Radlast von ca. 5 t.

Ausgehend von den Berechnungen von Wellner wurden Zweischichtsysteme bestehend aus einer unteren ungebunden Tragschicht und einer sich darauf befindenden gebundenen Asphalttschicht untersucht. Die Dicke der ungebundenen Schicht wurde ebenfalls

mit 1,5 m angenommen. Die Dicke der Asphaltsschicht wurde hingegen fñnfach variiert. Es wurden Dicken von 5 cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm und 25 cm berñcksichtigt. Um den Einfluss der Asphaltsteifigkeiten gezielt bewerten zu kñnnen, wurden fñr die obere gebundene Schicht konstante Schichtsteifigkeiten von 500 MPa, 1500 MPa, 5000 MPa und 25 000 MPa ausgewñhlt und linear elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Der Schichtenverbund zwischen der ungebundenen Tragschicht und der Asphaltsschicht wurde durch eine Zwischenschicht modelliert, die ein Durchdringen der Schichten verhindert aber eine Verschiebung gegeneinander erlaubt.

Fñr die Kalibrierung der Materialkenngrñßen Steifigkeitsmodul und Querdehnzahl fñr das linear elastische Berechnungsmodell wurde gemñß Wellner (1993) als Kalibriergrñße die belastungsabhñngige Einsenkung an der Oberseite der Asphaltsschicht in der Lastachse angenommen. Ziel sollte also sein, dass gleiche Modellbedingungen im linear und nichtlinear elastischen Berechnungsmodell zu gleichen Einsenkungen an der gleichen fñr die Kalibrierung angenommen Stelle fñhren. Um diesen Optimierungsprozess sinnvoll zu begrenzen, wurden fñr die Querdehnzahl des als linear anzunehmenden granularen Materials die konstanten Werte 0,3, 0,45 und 0,499 angenommen. Fñr jede Kombination aus Querdehnzahl der ungebundenen Tragschicht sowie Dicke und Steifigkeit der Asphaltsschicht wurde im linearen Berechnungsmodell die konstante Schichtsteifigkeit der ungebundenen Tragschicht so lange variiert, bis die Einsenkung an der Oberseite der Asphaltsschicht in der Lastachse der vorab ermittelten vergleichbaren Einsenkung im nichtlinearen Berechnungsmodell entsprach.

Um nun die Berechnungsergebnisse bei Annahme linearen und nichtlinearen Materialverhaltens vergleichen zu kñnnen, bedarf es der Festlegung von Bewertungsgrñßen. Vor dem Hintergrund der Bewertung des Ermñdungsverhaltens von Asphaltbefestigungen wurden als Vergleichsgrñße die maximalen radialen Dehnungen und Spannungen an der Unterseite der Asphaltsschicht in der Lastachse definiert. Bei den untersuchten Modellvarianten entsprechen die radialen Dehnungen und Spannungen in der Lastachse der 1. Hauptdehnung bzw. -spannung. Tabelle 4.4 und Tabelle 4.5 zeigen die berechneten relativen Abweichungen der radialen Dehnungen und Spannungen, ermittelt mit linear und nichtlinear elastischem Berechnungsansatz in Abhñngigkeit variierender Modellannahmen.

Die Ergebnisse zeigen mit grñßer werdender Querdehnzahl eine nichtlinear zunehmende Abweichung der Kenngrñßen. Sind die Kenngrñßen aus dem linearen System grñßer als jene aus dem nichtlinearen System, so ergibt sich eine negative Abweichung. D. h., in fast allen Modellvarianten erhñlt man bei Annahme linear elastischer Materialeigenschaften grñßere Dehnungen als bei Annahme nichtlinear elastischer Materialeigenschaften, was im Rahmen von Dimensionierungsberechnungen wiederum zu kñrzeren prognostizierten Lebensdauern fñhren wñrde. Man wñre somit bei Annahme linear elastischer Materialeigenschaften fñr ungebundene granulare Straßenbaustoffe „auf der sicheren Seite“.

Die in Tabelle 4.4 aufgelisteten Abweichungen lassen vermuten, dass bei Verwendung einer mñglichst kleinen Querdehnzahl zur Beschreibung der linearen Materialeigen-

Asphalt		GRA2-M-2.0			DIA4-M-3.4		
$d_A$ [mm]	$E_A$ [MPa]	$\nu = 0,30$ [-]	$\nu = 0,45$ [-]	$\nu = 0,499$ [-]	$\nu = 0,30$ [-]	$\nu = 0,45$ [-]	$\nu = 0,499$ [-]
relative Abweichung der radialen Spannungen [%]							
50	500	-27,70	-35,29	-45,72	-9,35	-12,65	-17,38
	1500	-40,88	-49,54	-62,62	-16,29	-22,76	-32,25
	5000	-22,35	-29,95	-43,34	-20,97	-28,55	-39,63
	25 000	-6,23	-12,93	-33,41	-9,68	-16,58	-29,23
100	500	-19,68	-26,35	-37,36	-11,43	-16,00	-22,67
	1500	-11,31	-18,26	-32,83	-11,13	-17,15	-26,78
	5000	-4,09	-10,38	-34,17	-6,95	-13,53	-26,88
	25 000	-0,43	-3,49	-11,12	-2,44	-8,40	-31,70
150	500	-9,66	-16,05	-29,88	-7,32	-11,86	-19,29
	1500	-4,25	-10,44	-33,14	-6,21	-12,17	-24,13
	5000	-0,98	-4,97	-16,56	-3,40	-9,62	-30,78
	25 000	0,04	-0,90	-3,08	-0,71	-4,02	-12,84
200	500	-5,44	-11,67	-31,08	-5,38	-10,23	-19,49
	1500	-1,76	-6,61	-22,20	-4,14	-10,19	-26,77
	5000	-0,19	-2,33	-7,25	-1,82	-6,92	-24,80
	25 000	-0,06	-0,29	-1,55	-0,03	-1,56	-5,42
250	500	-3,22	-8,87	-30,19	-4,28	-9,54	-21,54
	1500	-0,75	-4,20	-13,08	-2,90	-8,74	-30,06
	5000	0,04	-1,12	-3,70	-0,95	-4,67	-15,21
	25 000	-0,19	-0,17	-0,69	0,17	-0,49	-2,25

Tabelle 4.4: Relative Abweichungen der radialen Dehnungen an der Unterseite der Asphalt-schicht in der Lastachse bei Annahme von linear und nichtlinear elastischem Materialverhalten der ungebundenen Tragschichtmaterialien; Variation Dicke und Steifigkeit der Asphalt-schicht sowie der Querdehnzahl der ungebundenen Tragschichtmaterialien in den linearen Berechnungsmodellen.

schaften ungebundener Materialien auf eine Implementierung nichtlinear elastischer Stoffmodelle verzichtet werden kann. Dies ist partiell richtig, bedarf aber der ergänzenden Überlegung, dass sowohl die angenommene Kalibriergröße Einsenkung wie auch die Kenngrößen Dehnung und Spannung in der Lastachse der Berechnungsmodelle ermittelt wurden und somit nicht als mittlere Querdehnzahl im Querschnitt der ungebundenen Tragschichten angenommen werden dürfen. Eine Querdehnzahl von 0,499, wie bisher angenommen, wird seitens der Autoren als zu groß erachtet. Es wird empfohlen, zukünftig stattdessen eine Querdehnzahl von 0,45 zu verwenden. Von einer noch kleineren Querdehnzahl ist jedoch abzusehen.

Des Weiteren kann abgeleitet werden, dass mit zunehmender Dicke der Asphalt-schicht die maßgebenden Abweichungen abnehmen, so wie auch bei Zunahme der Asphalt-

Asphalt		GRA2-M-2.0			DIA4-M-3.4		
$d_A$ [mm]	$E_A$ [MPa]	$\nu = 0,30$ [-]	$\nu = 0,45$ [-]	$\nu = 0,499$ [-]	$\nu = 0,30$ [-]	$\nu = 0,45$ [-]	$\nu = 0,499$ [-]
relative Abweichung der radialen Spannungen [%]							
50	500	-41,58	-53,47	-72,72	-23,19	-33,45	-49,79
	1500	-53,40	-64,58	-83,00	-25,91	-36,25	-52,35
	5000	-25,65	-34,04	-49,00	-27,00	-36,46	-51,61
	25 000	-6,58	-13,45	-34,41	-10,56	-17,89	-31,51
100	500	-36,63	-47,24	-65,38	-33,08	-45,13	-64,44
	1500	-15,78	-24,14	-41,89	-19,14	-28,48	-44,30
	5000	-4,86	-11,66	-37,18	-9,04	-16,94	-33,12
	25 000	-0,48	-3,65	-11,56	-2,72	-9,06	-33,75
150	500	-18,81	-28,42	-48,98	-20,37	-31,10	-49,33
	1500	-6,29	-13,71	-40,47	-11,03	-20,12	-38,43
	5000	-1,23	-5,62	-18,33	-4,57	-12,10	-37,28
	25 000	0,04	-0,97	-3,31	-0,84	-4,45	-14,03
200	500	-11,04	-20,31	-48,30	-14,89	-26,07	-47,41
	1500	-2,77	-8,75	-27,81	-7,55	-16,86	-41,77
	5000	-0,30	-2,76	-8,41	-2,55	-8,89	-30,74
	25 000	-0,04	-0,32	-1,69	-0,06	-1,80	-6,14
250	500	-6,83	-15,39	-46,62	-11,74	-23,83	-50,85
	1500	-1,28	-5,73	-17,29	-5,41	-14,62	-47,14
	5000	0,02	-1,39	-4,54	-1,44	-6,28	-19,73
	25 000	-0,18	-0,19	-0,78	0,21	-0,59	-2,690

Tabelle 4.5: Relative Abweichungen der radialen Spannungen an der Unterseite der Asphalttschicht in der Lastachse bei Annahme von linear und nichtlinear elastischem Materialverhalten der ungebundenen Tragschichtmaterialien; Variation Dicke und Steifigkeit der Asphalttschicht sowie der Querdehnzahl der ungebundenen Tragschichtmaterialien in den linearen Berechnungsmodellen.

steifigkeit. Bei einer Querdehnzahl von 0,45, einer Asphalttsdicke von mindestens 20 cm und einer Asphalttssteifigkeit von 500 MPa betragen die berechneten Abweichungen der Dehnungen nur noch maximal knapp 12 %. Dieser Wert reduziert sich auf knapp 9 %, wenn eine wesentlich repräsentativere Asphalttssteifigkeit von 1500 MPa betrachtet wird. Auf Grundlage dieser Überlegung kann geschlussfolgert werden, dass bei Abweichungen in den zur rechnerischen Dimensionierung und Bewertung von Straßenkonstruktionen maßgebenden Dehnungen von ca. maximal 10 % das nichtlineare Materialverhalten ungebundener granularer Straßenbaustoffe vernachlässigt werden kann.

Grundsätzlich gilt darauf hinzuweisen, dass jedes Berechnungsmodell lediglich ein vereinfachtes Abbild einer tatsächlichen Konstruktion darstellt. So werden für verschiedene Einflussgrößen vereinfachte Annahmen getroffen, beispielsweise für die geometri-

schen Randbedingungen oder die Verteilung des Reifenkontaktdruckes. Auch mittels zur Verfügung stehender nichtlinearer Stoffmodelle kann tatsächliches Materialverhalten nur bedingt modelliert werden. Vor diesem Hintergrund können die berechneten Abweichungen als vertretbar betrachtet werden.

Da die durchgeführten Kalibrierungen nur für eine Radlast durchgeführt wurden, galt es weiter zu prüfen, welche Abweichungen zwischen linearer und nichtlinearer Berechnungsweise bei Berücksichtigung anderer Radlasten, ausgehend von den kalibrierten Ergebnissen, zu erwarten sind. Hierfür wurden die Berechnungen mit dem nichtlinear elastischen Stoffmodell für verschiedene Radlasten von 1 bis 11 Tonnen für alle Modellvarianten wiederholt und die gewünschten Bewertungsgrößen ausgelesen. Die Vergleichsgrößen des linearen Systems lassen sich hingegen durch Extrapolation der vorab bestimmten Vergleichsgrößen ermitteln. Bei Verdopplung der Radlast verdoppelt sich somit auch die Vergleichsgröße.

Bild 4.8 und Bild 4.9 zeigen exemplarisch die absolute und die relative Abweichung zwischen der radialen Dehnung an der Unterseite der Asphaltenschicht in der Lastachse bei Annahme linear und nichtlinear elastischen Materialverhaltens des ungebundenen Tragschichtmaterials Diabas. Die schwarze Linie kennzeichnet die Dehnungen, bestimmt mittels der kalibrierten Berechnungsmodelle. Die Berechnungen mit Annahme linear elastischer Materialeigenschaften zeigen für die einbezogenen Modellannahmen wieder weitestgehend größere Dehnungen als jene mit nichtlinear elastischem Berechnungsansatz. Die voran abgeleiteten Schlussfolgerungen können grundsätzlich bestätigt werden. Die kalibrierten Modelle repräsentieren weitestgehend mittlere Modellbedingungen bzw. daraus resultierend mittlere Berechnungsergebnisse. Für sehr hohe Radlasten und eine Querdehnzahl von 0,45 folgt zwar eine relative Abweichung zwischen den maßgebenden Dehnungen von ca. 20 %. Im Mittel beträgt die Abweichung auch hier nur ca. 10 %.

Bild 4.10 und Bild 4.11 zeigen für unterschiedliche Modellvarianten, ausgehend von den kalibrierten Modellvarianten (dargestellt als Punkt) die Spanne zu erwartender Abweichungen zwischen linearer und nichtlinearer Berechnungsweise für Radlasten zwischen 1 bis 11 Tonnen und Asphaltenschichtdicken von 20 cm und 25 cm. Bild 4.10 lässt sich aus Bild 4.9 ableiten. Mit zunehmender Asphaltsteifigkeit verschiebt sich der Kalibrierwert und die im nichtlinearen System bestimmten Dehnungen nehmen größere Werte an als die im linearen System ermittelten Dehnungen.

Für die Modellierung von Straßenbefestigungen mit relativ dünnen Asphaltenschichten auf ungebundenen Tragschichten sollte das nichtlineare Materialverhalten der granularen Baustoffe durch geeignete Stoffmodelle berücksichtigt werden. Der Einfluss nichtlinearen Materialverhaltens kann zudem durch die Wahl geeigneter Tragschichtmaterialien reduziert werden (vgl. Bild 4.7). Es ist davon auszugehen, dass für Befestigungsaufbauten mit einer Mindestasphaltenschichtdicke von 20 cm nichtlineares Materialverhalten der ungebundenen Tragschichten zur Begrenzung des Rechenaufwandes (vgl. Abschnitt 4.2.3) vernachlässigt werden kann.

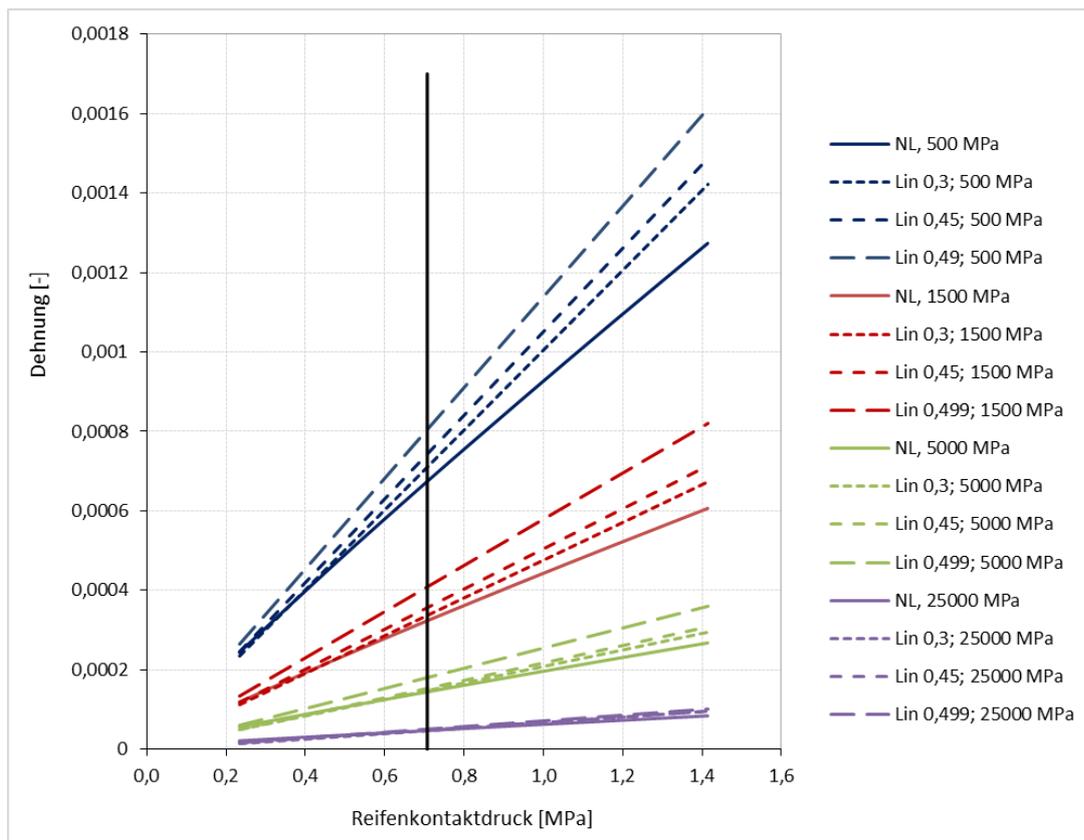


Bild 4.8: Radiale Dehnungen an der Unterseite der Asphalttschicht in der Lastachse bei Annahme von linear und nichtlinear elastischem Materialverhalten der ungebundenen Tragschichtmaterialien in Abhängigkeit des aufgetragenen Reifenkontaktdruckes; Variation der Steifigkeit der Asphalttschicht sowie der Querdehnzahl der ungebundenen Tragschichtmaterialien in den linearen Berechnungsmodellen; Kalibrierung der linearen Systeme für eine Belastung von 0,707 MPa (entspricht schwarzer Linie); Darstellung für eine Asphalttschichtdicke von 20 cm und das Tragschichtmaterial Diabas.

#### 4.2.3 Bewertung der Berechnungszeiten bei Berücksichtigung nichtlinearen Materialverhaltens

Die Einbindung nichtlinearer Stoffmodelle in Finite Elemente Programme ist i. d. R. mit einer Vielzahl an Konfigurationsmöglichkeiten verbunden. Von besonderer Bedeutung ist hierbei die Wahl und Konfiguration des zu verwendenden Löser.

Grundsätzlich gilt, dass jeder Löser geeignet konfiguriert werden muss. Die gewählte Konfiguration eines Löser bestimmt, bei konstanten Modellannahmen, maßgebend die Rechengenauigkeit und -geschwindigkeit eines Berechnungsvorganges. Die Bewertung

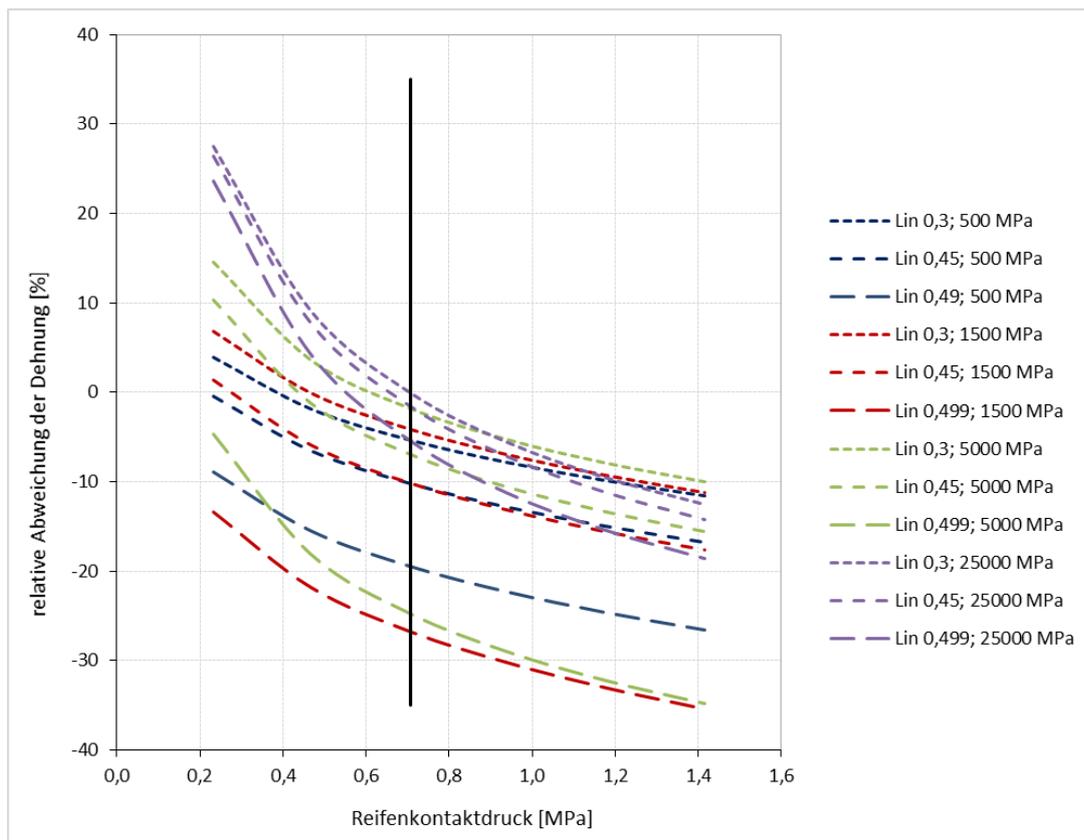


Bild 4.9: Relative Abweichungen der radialen Dehnungen an der Unterseite der Asphalttschicht in der Lastachse bei Annahme von linear und nichtlinear elastischem Materialverhalten der ungebundenen Tragschichtmaterialien in Abhängigkeit des aufgetragenen Reifenkontaktdruckes; Variation der Steifigkeit der Asphalttschicht sowie der Querdehnzahl der ungebundenen Tragschichtmaterialien in den linearen Berechnungsmodellen; Kalibrierung der linearen Systeme für eine Belastung von 0,707 MPa (entspricht schwarzer Linie); Darstellung für eine Asphalttschichtdicke von 20 cm und das Tragschichtmaterial Diabas.

der Rechengenauigkeit sollte stets auf eine maßgebende (den Anwender interessierende) Bewertungsgröße bezogen werden (vgl. Abschnitt 4.2.2). Die Lösung des jeweiligen physikalischen Problems (Berechnung eines Beanspruchungszustandes) gilt als ausreichend genau, wenn die Lösung konvergiert ist. Dies bedeutet, dass ein vorab definierter zulässiger maximaler Fehler erreicht wird. Dieser relative Fehler beschreibt eine Abweichung zwischen aktueller und aktuell geschätzter exakter Lösung.

Voraussetzung hierfür ist jedoch u. a., dass zur Lösung eines physikalischen Problems eine ausreichend große Anzahl möglicher Iterationsschritte vorab definiert wurde. In

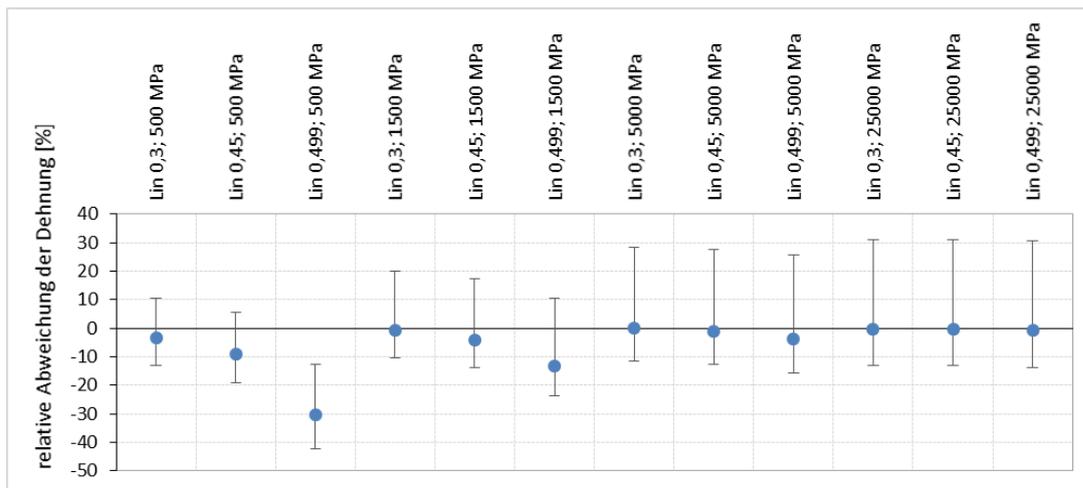


Bild 4.10: Spanne der relativen Abweichungen der radialen Dehnungen an der Unterseite der Asphalttschicht in der Lastachse bei Annahme von linear und nichtlinear elastischem Materialverhalten der ungebundenen Tragschichtmaterialien in Abhängigkeit des aufgetragenen Reifenkontaktdruckes von 1 bis 11 Tonnen; Variation der Steifigkeit der Asphalttschicht sowie der Querdehnzahl der ungebundenen Tragschichtmaterialien in den linearen Berechnungsmodellen; Kalibrierung der linearen Systeme für eine Belastung von 0,707 MPa (entspricht schwarzer Linie); Darstellung für eine Asphalttschichtdicke von 20 cm und das Tragschichtmaterial Diabas.

Abhängigkeit der Modellannahmen, insbesondere der verwendeten Parametersätze für das nichtlineare Dresdner Stoffmodell und der aufgetragenen Belastung können sich deutlich unterschiedliche Anzahlen an notwendigen Iterationsschritten ergeben. Mit zunehmender Belastung (Beanspruchung) nimmt auch die Anzahl notwendiger Iterationsschritte zu. Während eines Iterationsprozesses wird eine Beanspruchungsgröße schrittweise auf eine Zielgröße (wie die einwirkende Radlast) erhöht.

Zur Lösung nichtlinearer Probleme (Modelle) findet i. d. R. das Newtonverfahren Anwendung. Der Dämpfungsfaktor des gedämpften Newtonverfahrens bestimmt ebenfalls die Anzahl erforderlicher Iterationsschritte, die zur Bereitstellung konvergierter Lösungen notwendig sind. Wird die Schrittweite zu groß gewählt, so kann es passieren, dass ein Berechnungsmodell nicht konvergiert.

Die Güte der Konvergenz wird i. d. R. durch Konvergenzplots dargestellt. Ist ein Berechnungsmodell nicht ausreichend konvergiert, so kann es dennoch sein, dass sich für die maßgebende Berechnungsgröße ein stabiler Wert ausreichender Genauigkeit eingestellt hat. Allgemein gilt, dass unterschiedliche granulare Materialien und Material- bzw. Schichtkombinationen unterschiedlich konvergierende Berechnungsmodelle bewirken.

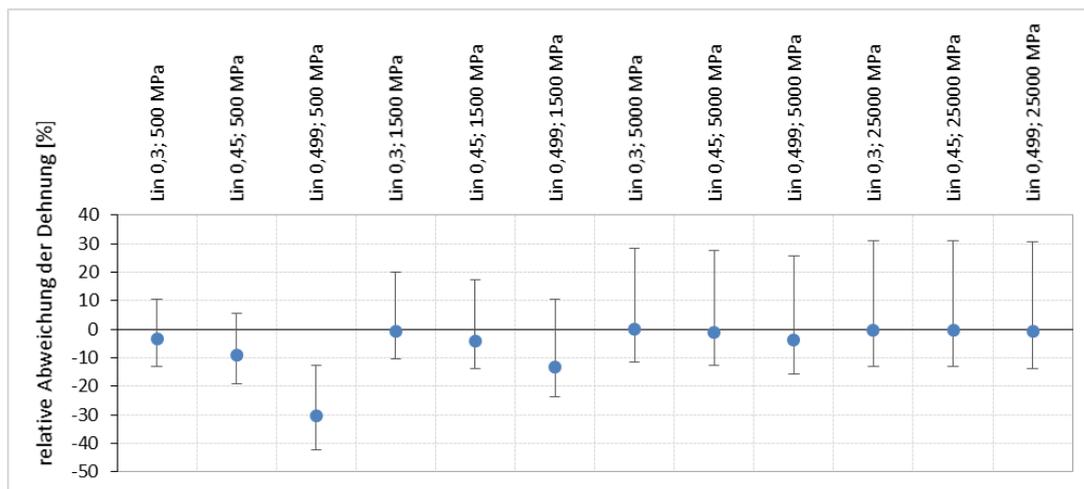


Bild 4.11: Spanne der relativen Abweichungen der radialen Dehnungen an der Unterseite der Asphalttschicht in der Lastachse bei Annahme von linear und nichtlinear elastischem Materialverhalten der ungebundenen Tragschichtmaterialien in Abhängigkeit des aufgebrachtten Reifenkontakttdruckes von 1 bis 11 Tonnen; Variation der Steifigkeit der Asphalttschicht sowie der Querdehnrzahl der ungebundenen Tragschichtmaterialien in den linearen Berechnungsmodellen; Kalibrierung der linearen Systeme für eine Belastung von 0,707 MPa (entspricht schwarzer Linie); Darstellung für eine Asphalttschichtdicke von 25 cm und das Tragschichtmaterial Diabas

Für ein Berechnungsmodell gilt es, die Schrittweite und den zu erreichenden oberen Grenzwert des relativen Fehlers so festzulegen, dass sich für die maßgebende Berechnungsgröße eine konvergente Lösung bei vertretbarer Rechenzeit einstellt.

Eine allgemeingültige Aussage hinsichtlich zu erwartender Rechenzeiten bei Verwendung nichtlinearer Stoffmodelle kann nicht abgeleitet werden. Neben programminternen Konfigurierungsmöglichkeiten haben außerdem die Feinheit des Berechnungsnetzes, die die Anzahl zu berechnender Knoten definiert, sowie die gewählte Modellgeometrie und angenommene Randbedingungen einen großen Einfluss auf die Rechengeschwindigkeit. Nicht zu vernachlässigen ist außerdem die Wahl der zu verwendenden Rechentechnik und eventuelle Möglichkeiten der Parallelisierung von Berechnungsabläufen.

Die Optimierung der Rechengeschwindigkeit ist insbesondere bei der Durchführung von Dimensionierungsberechnungen notwendig und sollte vorab für die jeweils ungünstigsten Modellannahmen (hier: größte Radlast und geringste Asphaltsteifigkeit/höchste Oberflächentemperatur) durchgeführt werden.

Um nun dennoch Aussagen hinsichtlich zu erwartender Rechenzeiten bei Einbeziehung nichtlinearer Stoffmodelle für ungebundene Straßenbaustoffe treffen zu können, wurde abermals ein rotationssymmetrisches Berechnungsmodell in **COMSOL Multiphysics**

erstellt. Diesmal wurde ein Dreischichtsystem bestehend aus einer 34 cm dicken Asphalt-schicht, einer 50 cm dicken Tragschicht ohne Bindemittel und einem Boden mit einer Dicke von 1,5 m erstellt. Die Steifigkeit des Asphalts wurde gemäß RDO Asphalt 2009 (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009) in Abhängigkeit der Oberflächentemperatur und der daraus abzuleitenden Temperatur in beliebiger Befestigungstiefe eingebunden. Zur Modellierung des nichtlinear elastischen Verhaltens der Tragschichtmaterialien wurden die Parametersätze des Dresdner Modells in Tabelle 4.3 verwendet. Da die Berechnungszeiten bei Anwendung nichtlinearer Stoffmodelle von der Größe der angenommenen Beanspruchungen abhängig sind, wurden, ebenfalls gemäß RDO Asphalt 2009, Radlasten von 1 bis 11 Tonnen einbezogen und diese jeweils mit den bekannten 13 Oberflächentemperaturen kombiniert. In Summe erhält man somit 143 zu modellierende Belastungszustände.

Die Berechnungsmodelle wurden für die ungünstigsten Belastungskombinationen sowie für verschiedene Bewertungsgrößen und eine akzeptable grafische Darstellung der Bewertungsgrößen im Querschnitt optimiert. Die Möglichkeit einer weiteren Modelloptimierung ist vom jeweiligen Anwendungsfall bzw. -ziel abhängig.

Die aus den durchgeführten Berechnungen abgeleiteten Berechnungszeiten, unter Berücksichtigung der gewählten Modellannahmen und Rechentechnik, dürfen nicht als allgemeingültige Berechnungszeiten verstanden werden. Die ermittelten Berechnungszeiten wurden auf einem Windows-Server-2019-System (Windows Server 2019 Standard, Version 1809) mit vier Intel<sup>®</sup>-Xeon<sup>®</sup>-E5-4620-v2-CPU's (@ 2,60 GHz), 256 GB Arbeitsspeicher und parallelisiert auf vier Rechenkernen gemessen und sind in Tabelle 4.6 zusammengefasst.

Auf Grundlage der durchschnittlichen Berechnungsdauer für einen Belastungszustand wurden die zu erwartenden Berechnungsdauern für die sich nach den RDO Asphalt 2009/2020 (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009) ergebende Anzahl an Belastungszuständen abgeleitet. Da gemäß den RDO Asphalt 2009/2020 einige Temperaturzustände ohne Häufigkeit belegt sind, kann die Summe der zu berechnenden Belastungszustände im Durchschnitt um mindestens 25 % reduziert werden.

Die Ergebnisse verdeutlichen, dass die Wahl der Modellparameter einen enormen Einfluss auf die Berechnungsdauer hat. Bei geeigneter Materialwahl stellen sich für Berechnungen nach den RDO Asphalt 2009/2020 akzeptable Berechnungszeiten von knapp zwei Tagen ein. Umfangreichere Berechnungen, bei denen einzelne Modellannahmen, wie Randbedingungen, Schichtdicken oder Materialien variiert werden sollen, sind jedoch mit einem deutlich größeren zeitlichen Aufwand verbunden. Aus Sicht der Autoren ist somit die Kopplung nichtlinearer Stoffmodelle mit probabilistischem Berechnungsansatz derzeit nicht zu empfehlen. Die Durchführung von Berechnungen mit nichtlinear elastischen Stoffmodellen zur Modellierung des nichtlinearen Materialverhaltens ungebundener Straßenbaustoffe sollte nicht als Standardlösung sondern nur für Einzelfälle Anwendung finden.

	RDO Asphalt 2009	RDO Asphalt 2009/2020	RDO Asphalt 2009/2020 (red. Anz. Zustände)
Temperatur- zustände	13	156	117
Achslasten	11	26	26
Belastungs- zustände	143	4056	3042
Berechnungsdauern DIA4-M-3.4			
gesamt [s]	7549	214 117	160 588
im Mittel je Einzelrechnung [s]	52,8	52,8	52,8
gesamt [h]	2,1	59,5	44,60
Berechnungsdauern GRA2-M-2.0			
gesamt [s]	23 458	665 354	499 016
im Mittel je Einzelrechnung [s]	164,0	164,0	164,0
gesamt [h]	6,5	184,8	138,6

Tabelle 4.6: Berechnungszeiten für variierende Modellannahmen bei Anwendung des Dresdner Stoffmodells zur Berücksichtigung des nichtlinear elastischen mechanischen Verhaltens verschiedener ungebundener granularer Tragschichtmaterialien.

## 4.3 Schichtenverbund

Der Schichtenverbund beschreibt die gemeinsame Eigenschaft zweier Schichtgrenzflächen mittels der zwischen ihnen vorhandenen Verklebung, Verzahnung und Reibung, Scher- und Normalspannungen übertragen zu können. Um den Einfluss des Schichtenverbundes auf die Beanspruchungen im Asphalt festzustellen, wurden bereits in den siebziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts diesbezügliche Untersuchungen u.a. von Leutner (1979) durchgeführt.

In den „Richtlinien für die rechnerische Dimensionierung des Oberbaus von Verkehrsflächen mit Asphaltdeckschicht“ (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009) wird der Schichtenverbund für das Berechnungsmodell und in Abhängigkeit der angrenzenden Schichten, entweder als vollständiger oder als vollständig aufgelöster Verbund verwendet. Da diese beiden Varianten nur theoretische Annahmen sind, spiegeln sie nicht die realen Zustände in einer Asphaltbefestigung wider.

Um den Schichtenverbund und seinen Einfluss besser untersuchen zu können, wurde eine Prüfvorrichtung für dynamische Prüfmaschinen entwickelt und die Versuchsergebnisse innerhalb des Forschungsprojektes „Zyklische Schersteifigkeits- und Scherermüdungsprüfung zur Bewertung und Optimierung des Schichtenverbundes in Straßenbefestigungen aus Asphalt“ (Wellner und Wistuba 2016) in SAFEM integriert. Es konnte nicht nur gezeigt werden, dass der Schichtenverbund einen starken Einfluss auf das Ermüdungsverhalten des Asphalts hat, sondern das auch in der Qualität des Schichtenverbundes ein hohes wirtschaftliches Potential steckt. So ist es möglich, dass, wenn man einen guten Schichtenverbund dauerhaft gewährleisten kann, dünnere Asphaltsschichten eingebaut werden können und anschließend rechnerisch die gleiche Haltbarkeit der Asphaltkonstruktion erzielt.

### 4.3.1 Schichtenverbundversuch

Bei dem Versuch zur Bestimmung des Schichtenverbundes werden die Probekörper dynamisch mit einer bestimmten Scherbelastung  $F_S$  beansprucht. Dabei variieren die Temperatur  $T$ , die Belastungsfrequenz  $f$  und die auf den Verbund wirkende Normalspannung  $\sigma_N$ , um ein möglichst realistisches Belastungsspektrum zu simulieren und die entsprechenden Materialantworten zu eruiieren (siehe Bild 4.12).

Die Probekörper werden innerhalb einer Prüfung bei vier Temperaturen ( $-10^\circ\text{C}$ ,  $10^\circ\text{C}$ ,  $30^\circ\text{C}$ ,  $50^\circ\text{C}$ ), jeweils mit fünf Frequenzen (10 Hz, 3 Hz, 1 Hz, 0,3 Hz, 0,1 Hz) und je vier Normalspannungen (0,9 MPa, 0,6 MPa, 0,3 MPa, 0 MPa) belastet. Daraus ergeben sich 80 Messwerte der Schersteifigkeit des Schichtenverbundes mit deren Hilfe die verbundspezifischen Parameter der Modellformel bestimmt werden können.

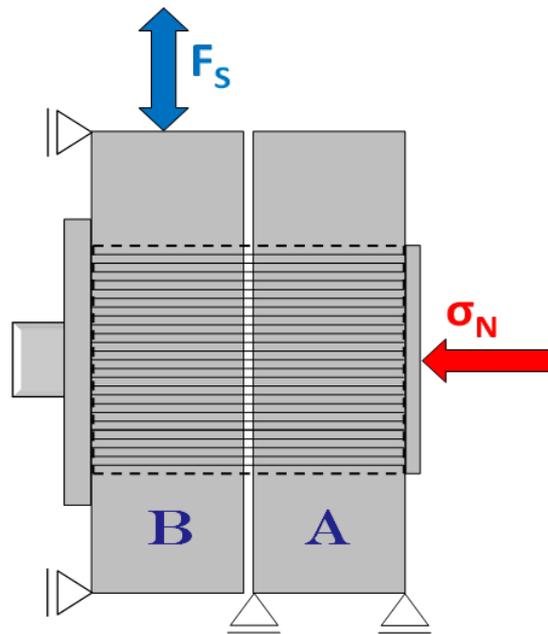


Bild 4.12: Modell der Prüfvorrichtung für die Bestimmung des Schichtenverbundes.  
Quelle: Wellner und Wistuba (2016, Kapitel 3, Abbildung 3.7)

#### 4.3.2 Versuchsauswertung

Für die Anwendung der Versuchsergebnisse des Schichtenverbundversuches bedarf es einer mathematischen Beschreibung des Materialverhaltens. Hierfür wurden zum einen die Erkenntnisse aus dem Forschungsprojekt Wellner und Wistuba (2016, Kapitel 4, Gleichung 19 und 20) und zum anderen die von WELLNER UND GEROWSKI, innerhalb des ZIM-Forschungsprojektes „Weiter- und Neuentwicklung einer Bitumenemulsion (Mörtel) zur Optimierung der Verbundwirkung zwischen Asphaltsschichten insbesondere für Erhaltungs- und Erneuerungsmaßnahmen“ weiterentwickelte Modellformel verwendet (siehe Gleichung 4.2).

$$G_S = G_{S_{\min}} + \frac{G_{S_{\max}} - G_{S_{\min}}}{1 + e^{(a \cdot m + b \cdot \sigma_N + c)}} \quad (4.2)$$

$G_S$	[MPa]	Schersteifigkeit
$G_{S_{\min}}$	[MPa]	minimale Schersteifigkeit
$G_{S_{\max}}$	[MPa]	maximale Schersteifigkeit
$m$	[Hz]	Temperatur-Frequenz-Äquivalenz-Parameter
$\sigma_N$	[MPa]	Normalspannung
$a$	$\left[\frac{1}{\text{Hz}}\right]$	Materialparameter
$b$	$\left[\frac{1}{\text{MPa}}\right]$	Materialparameter
$c$	[-]	Materialparameter

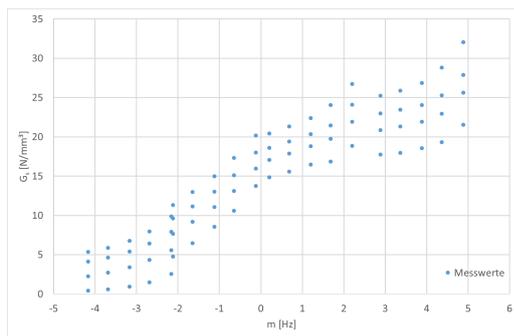
mit:

$$m = \log\left(f \cdot \frac{1}{e^{-\frac{E_a}{R} \cdot \left(\frac{1}{T+273,15} - \frac{1}{T_R+273,15}\right)}}\right) \quad (4.3)$$

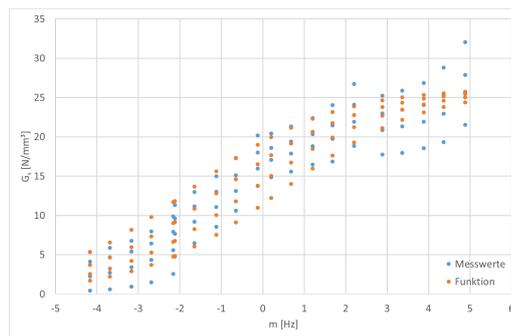
$m$	[Hz]	Temperatur-Frequenz-Äquivalenz-Parameter
$f$	[Hz]	Frequenz
$E_a$	$\left[\frac{\text{J}}{\text{mol}}\right]$	Aktivierungsenergie
$R$	$\left[\frac{\text{J}}{\text{mol K}}\right]$	universelle Gaskonstante $\left(8,314\,462\,618\,153\,24 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}\right)$
$T$	[°C]	Temperatur
$T_R$	[°C]	Referenztemperatur (20 °C)

Mit Hilfe der Gleichung 4.2 und der Anpassung der hierbei verwendeten Parametern  $a$ ,  $b$  und  $c$  sowie  $G_{S_{\min}}$ ,  $G_{S_{\max}}$  und  $E_a$  können die im Versuch bestimmten Schersteifigkeiten durch die Modellgleichung approximiert werden (siehe Bild 4.13).

Die Berücksichtigung des Einflusses der Normalspannung  $\sigma_N$  und ihre Verwendung innerhalb der Sigmoidfunktion führen dazu, dass sich die Berechnungsergebnisse nicht-linear verhalten. Somit müssen die Spannungen, Dehnungen und Verschiebungen an den Nachweispunkten, für jede der verschiedenen Achslasten, in jeweils mehreren Iterationen bestimmt werden, was zu einer deutlich verlängerten Berechnungszeit führt.



(a) Ergebnisse Schichtenverbundversuch



(b) Regression der Versuchsergebnisse

Bild 4.13: Beispielhaftes Ergebnis einer Auswertung eines Schichtenverbundversuches.

### 4.3.3 Einfluss der Normalspannung

Die Darstellung der Flächenfunktion der Schersteifigkeit  $G_S$  (siehe Bild 4.14) - in Abhängigkeit der Normalspannung ( $\sigma_N$ ), der Temperatur und der Frequenz (kombiniert in  $m$ ) - impliziert einen geringen Anstieg der Schersteifigkeit in Richtung der Normalspannung.

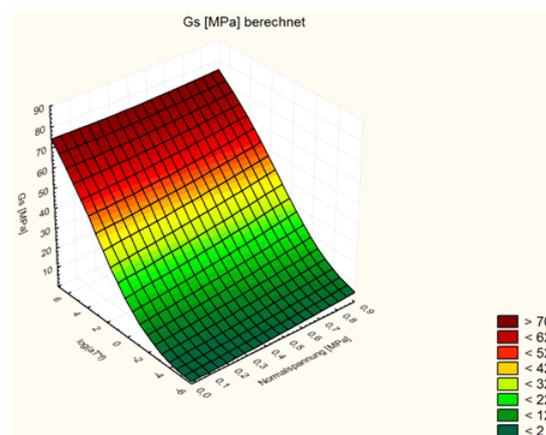
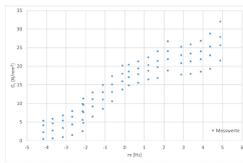


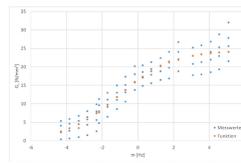
Bild 4.14: Beispielhafte Darstellung einer aus Gleichung 4.2 resultierenden Flächenfunktion. Quelle: Wellner und Wistuba (2016, Kapitel 4, Abbildung 4.8b)

Um diesen Einfluss genauer quantifizieren zu können, wurde die Versuchsauswertung der Schichtenverbundversuche dahingehend geändert, dass für die Spannungsunabhängigkeit von  $G_S$  (Gleichung 4.2) nun  $b = 0$  gilt. Anschließend wurden die Versuchsergebnisse neu ausgewertet (siehe Bild 4.15) und mit den neuen Funktionsparametern Vergleichsrechnungen durchgeführt.

Für die Vergleichsrechnungen wurde ein Befestigungsaufbau der Belastungsklasse Bk100 gemäß der Tafel 1 Zeile 1 der RStO (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrs-



(a) Ergebnisse Schichtenverbundversuch



(b) Spannungsunabhängige Regression der Versuchsergebnisse

Bild 4.15: Beispielhaftes Ergebnis einer Auswertung eines spannungsunabhängigen Schichtenverbundversuches.

wesen (FGSV) 2012), mit den Kalibrierasphalten der RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009) gewählt und die Auswirkungen der Spannungsabhängigkeit für zehn verschiedene, versuchstechnisch untersuchte Schichtenverbände bestimmt (siehe Tabelle 4.7).

Verbund / Material	Nutzungsdauer bei Versuchsauswertung		Differenz	
	spannungsabhängig	spannungsunabhängig	Jahre	Prozent
1	26,87	28,82	1,95	7,26
2	18,57	20,10	1,52	8,24
3	17,67	17,79	0,15	7,26
4	20,60	22,49	1,89	0,85
5	24,15	24,85	0,70	9,17
6	15,99	18,00	2,01	12,57
7	26,24	27,91	1,67	6,36
8	24,74	26,97	2,23	9,01
9	25,13	27,69	2,56	10,19
10	28,50	29,86	1,37	4,77

Tabelle 4.7: Einfluss der Spannungsabhängigkeit auf den Ermüdungsstatus relativ bezogen auf den GoodCase-Schichtenverbund (Wellner und Wistuba (2016, Kapitel 5)) und 30 Jahre Nutzungsdauer.

Anhand der Ergebnisse der Vergleichsrechnungen ist erkennbar, dass sich die Differenzen zwischen den Nutzungsdauern der verschiedenen Schichtenverbände sehr stark unterscheiden - bei Verbund Nr. 4 hat die Normalspannung kaum einen Einfluss auf die Nutzungsdauer, bei Verbund Nr. 6 ist er hingegen sehr stark ausgeprägt. Bezogen auf die Nutzungsdauer, die relativ zum GoodCase-Verbund (Wellner und Wistuba (2016, Kapitel 5)) berechnet wurden, übersteigt die Differenz der Nutzungsdauer selten die 2-Jahres-Grenze.

Hinsichtlich der Berechnungsdauer ergibt sich ein deutlich größerer zeitlicher Unterschied, ob man mit einem spannungsabhängigen oder mit einem spannungsunabhängigen Schichtenverbund rechnet (siehe Tabelle 4.8). Aufgrund der Nichtlinearität der

Normalspannungsabhängigkeit müssen die Dehnungen in den Nachweispunkten durch einen iterativen Prozess bestimmt werden, welcher abbricht, wenn eine vorher festgelegte Differenz im Vergleich zur vorherigen Iteration unterschritten wurde. Erhöht man diese Genauigkeit, sind unter Umständen weitere Iterationen notwendig und die Berechnungszeit des spannungsabhängigen Schichtenverbundes erhöht sich entsprechend. Für eine Vergleichbarkeit der Berechnungszeiten wurden die spannungsabhängige und -unabhängige Rechnungen nacheinander auf einem Windows-10-System (Windows 10 Education, Version 1909) mit einer Intel®-Core™-i7-7600U-CPU (@ 2,80 GHz), 20 GB Arbeitsspeicher und parallelisiert auf zwei Rechenkernen durchgeführt.

Folgendes Berechnungsmodell liegt den Vergleichsrechnungen zugrunde:

- Schichtenaufbau: 5 Schichten (ADS - ABS - ATS - FSS - UG)
- Materialien: linear elastisch
- Verkehrsbelastung: Elf Achlastklassen gemäß den RDO Asphalt 09 (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009) - die Lasteinleitungsfläche ist kreisförmig mit einem Radius von 150 mm.
- Schichtenverbund: Spannungsabhängiger bzw. -unabhängiger Schichtenverbund zwischen den Asphaltsschichten, sonst vollständig aufgelöster Verbund. (Bei spannungsabhängigem Schichtenverbund werden vor einer nächsten Iteration die Vertikalspannungen von 130 000 Punkten an den entsprechenden Grenzschichten berechnet, um die Schersteifigkeit  $G_S$  gemäß Gleichung 4.2 zu bestimmen und für den nächsten Berechnungsschritt vorzugeben.)
- Temperatur: 13 Oberflächentemperaturklassen gemäß den RDO Asphalt 09 (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009) - Temperaturverläufe innerhalb der Konstruktion entsprechen ebenfalls dem Modell der RDO Asphalt 09.
- Nachweispunkte: 72 Nachweispunkte

Was in Tabelle 4.8 nicht berücksichtigt wurde, ist die Tatsache, dass sich der spannungsunabhängige Schichtenverbund linear-elastisch verhält und somit nicht 143 Belastungssituationen (13 Temperaturklassen  $\times$  11 Achslastklassen), sondern nur 13 Belastungssituationen (13 Temperaturklassen  $\times$  1 Achslastklasse) hätten berechnet werden müssen. Das hätte die Berechnungszeit auf etwa 19 min reduziert und somit wäre die Berechnung mit Hilfe des spannungsunabhängigen Schichtenverbund (unter dem verwendeten Grad der Parallelisierung) etwa 250-mal schneller, als mit der Normalspannungsabhängigkeit.

Neben der Berechnungszeit hat der spannungsunabhängige Schichtenverbund noch einen weiteren Vorteil. Da er nur noch von der Temperatur und der Frequenz abhängt, ist dieser in der Modellannahme flächig konstant - erfüllt somit die Beschränkungen der Mehrschichtentheorie - und kann somit auf den AK-Faktor der Mehrschichtentheorie abgebildet werden. Somit ist es möglich, dass auch bei Berechnungen mit der Mehrschichtentheorie auf die Ergebnisse und Erkenntnisse der Versuche zum Schichtenverbund zurückgegriffen werden kann.

Programmabschnitt	Berechnungsdauer mit Schichtenverbund	
	spannungsabhängig	spannungsunabhängig
Generierung des Maschennetzes	3,27 s	3,74 s
Erstellung der Globalen Berechnungsmatrix	0,26 s	0,27 s
	Belastungssituation 1	
Erstellung der Berechnungsmatrix der Beanspruchung	15,18 s	16,04 s
Bestimmung der Verschiebungs-, Dehnungs- und Spannungsmatrizen	52,87 s	47,62 s
Berechnung Werte Nachweispunkte	47,12 s	44,59 s
Berechnung Werte Schichtenverbund	850,18 s	
Iteration 1 gesamt	950,17 s	
Iteration 2 gesamt	941,75 s	
Iteration 3 gesamt	95,80 s	
Belastungssituation 1 gesamt	2002,90 s	108,27 s
143 Belastungssituationen gesamt	80 h 13 min	4 h 39 min

Tabelle 4.8: Einfluss der Spannungsabhängigkeit auf die Berechnungsdauer des Ermüdungsstatus bei der Berechnung mit SAFEM.

## 4.4 Lastposition und Randeinflüsse

Ein nennenswerter Vorteil von **FSFEM** ist, dass Randeinflüsse recht einfach berücksichtigt werden können. Hierzu muss lediglich die Geometrie durch vorhandene Bankette oder dergleichen ergänzt werden. Die Vernetzung mit **GMSH** erfolgt auch für derartige Aufbauten vollautomatisch mit lokaler Netzverfeinerung um die Lasteinleitungsflächen herum, wie in Bild 4.16 dargestellt.

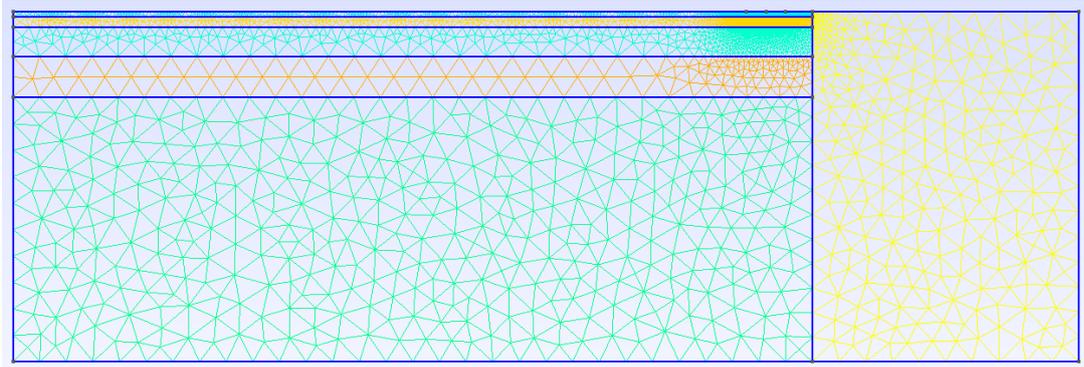


Bild 4.16: Beispielaufbau und Netz mit Bankett und Lasteinleitung am rechten Rand.

In Abschnitt 6.2 sind qualitative Unterschiede einer Randbelastung mit und ohne Bankett zur mittigen Belastung dargestellt. In FE 04.0327/2018/OGB: „Aspekte der Dimensionierung und Konstruktion zur Sicherstellung der Verfügbarkeit bei temporärer Nutzung von Randbereichen von Bundesfernstraßen“ wird der Thematik der Seitenstreifenbefahrung und damit der Randstellung von Lasten zusätzliche Aufmerksamkeit gewidmet.

# 5 AP 500: Kopplung des numerisch-deterministischen Rechenkerns und des vereinfachten analytisch-deterministischen Rechenkerns mit dem optimierten probabilistischen Verfahren

Im Folgenden werden die Assemblierung der einzelnen Programmbestandteile in ein Gesamtpaket und die dazu nötigen Schnittstellen beschrieben.

## 5.1 Modularer Aufbau des Programms

Das Berechnungsprogramm ist modular so aufgebaut, dass die Programmmodule problemlos ersetzt oder erweitert werden können (siehe Bild 5.1). Des Weiteren erleichtert die Modularisierung bei der Programmentwicklung und -anwendung die Fehlersuche, da es an den Modulschnittstellen zu einer strukturierten Datenübergabe kommt.

Die einzelnen Module haben dabei folgende Funktion:

- Modul 1: Laden der Konfiguration und Eingangsdaten  
Die Konfigurationsdatei wird geladen und entsprechend deren Inhaltes werden die Datenbanken und Datensätze für die Berechnung zusammengesucht und auf eventuelle Fehler, Widersprüche oder Inkonsistenzen untersucht.
- Modul 2: Vorbereitung der Berechnung der Beanspruchungszustände  
Die eingelesenen Materialparameter werden auf Stützstellenangaben überprüft und bei Bedarf die Funktionsparameter mittels Interpolation bestimmt. Des Weiteren werden in diesem Modul die zu berechnenden Beanspruchungszustände festgelegt, siehe AP 300 (Link wird im ESB korrigiert Abschnitt 3) und Abschnitt 5.
- Modul 3: Berechnung der Beanspruchungszustände  
Je nach ausgewähltem Rechenkern oder Programmmodul (siehe Abschnitt 2 und

Abschnitt 4) werden die für die Berechnung des Beanspruchungszustands notwendigen Daten (e.g. Netzgenerierung für FSFEM, Berechnung und Zuweisung der Elementsteifigkeiten, Nachweispunkte,...) zusammengestellt und die Berechnungen durchgeführt.

- Modul 4: Nachbereitung der Berechnung der Beanspruchungszustände  
Wenn in der Konfiguration die analytische Berechnungsart ausgewählt wurde, werden nun die Ergebnisse der reduzierten Anzahl der Beanspruchungszustände verwendet, um mittels Interpolation die Ergebnisse der zuvor weggelassenen Beanspruchungszustände funktional zu berechnen, siehe AP 300 (Link wird im ESB korrigiert Abschnitt 3) und Abschnitt 5.
- Modul 5: Auswertung der Berechnungsergebnisse  
Die Berechnungsergebnisse werden nun, entsprechend der Konfiguration, für die grafische Darstellung einer Strukturanalyse oder für eine deterministische bzw. probabilistische Dimensionierungsrechnung verwendet.

## 5.2 Integration des optimierten probabilistischen Verfahrens in das Gesamtprogramm und Anbindung an die Berechnungskerne

Bei dem optimierten probabilistischen Verfahren handelt es sich um einen funktionalen und analytischen Lösungsansatz für das numerische Verfahren, welches in den „Richtlinien zur Bewertung der strukturellen Substanz des Oberbaus von Verkehrsflächen in Asphaltbauweise (RSO Asphalt)“ (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018) beschrieben ist. Der Nachteil des Verfahrens der RSO Asphalt besteht in der unter Umständen sehr großen Menge an Beanspruchungszuständen, die berechnet werden müssen. Dieser Nachteil soll durch das in AP300 beschriebene, optimierte Verfahren reduziert werden (siehe Bild 5.2).

Anstatt alle Beanspruchungszustände zu berechnen, wird dies nur für eine Auswahl getan, die im Programmmodul 2 (siehe Bild 5.1) zusammengestellt wird. Deren Ergebnisse dienen im weiteren Verlauf des Verfahrens als Stützstellen für eine Interpolation des funktionalen Zusammenhangs. Mithilfe der berechneten Funktionsparameter können nun die Ergebnisse der zuvor weggelassenen Beanspruchungszustände im Programmmodul 4 (siehe Bild 5.1) analytisch bestimmt werden.

Nach der Berechnung der Ergebnisse arbeiten alle weiteren Programmteile unbeeinflusst. Die Menge und Auswahl der für das optimierte probabilistische Verfahren notwendigen Beanspruchungszustände lässt sich über den Berechnungsmodus und den damit verbundenen Konfigurationen beeinflussen.

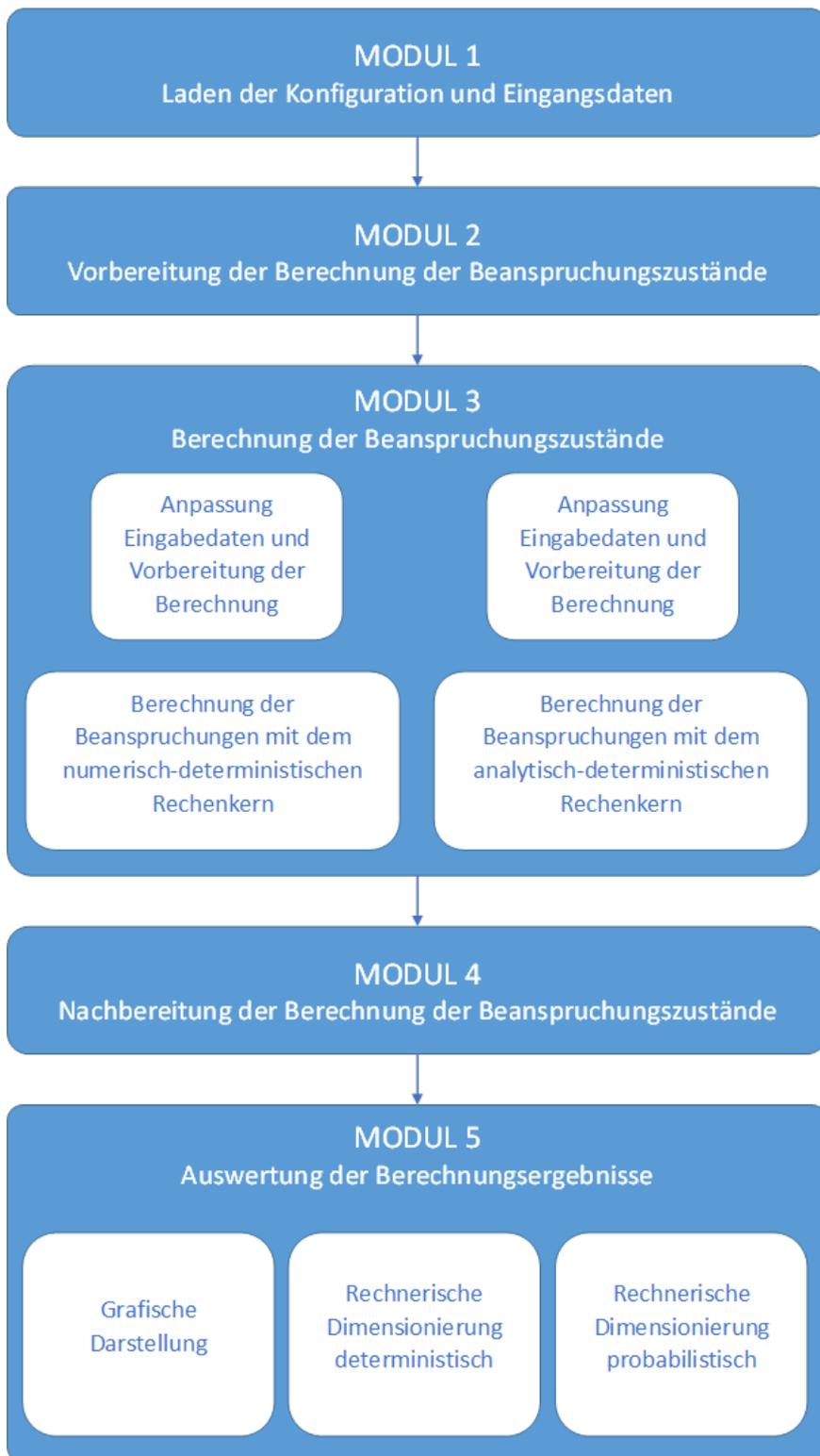


Bild 5.1: Modularer Aufbau des Programmes

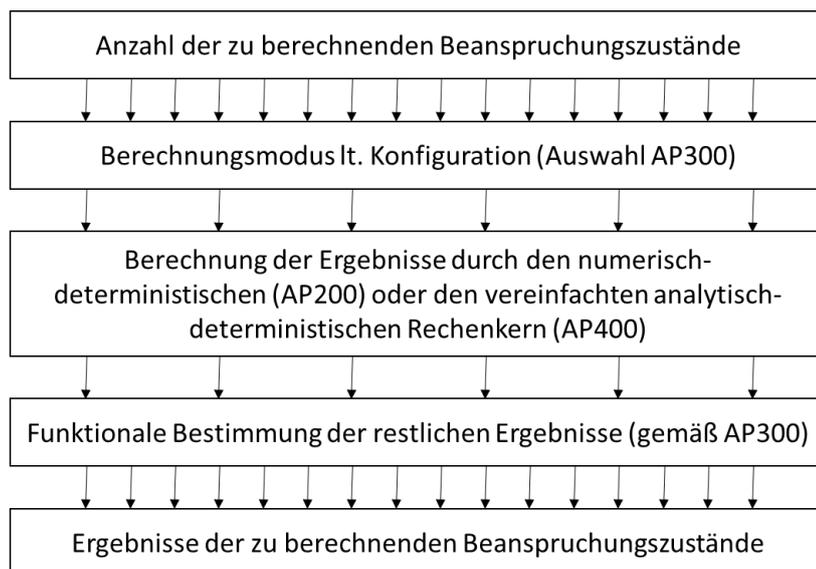


Bild 5.2: Schematische Darstellung der Kopplung der Ergebnisse von AP200 (Abschnitt 2), AP300 und AP400 (Abschnitt 4).

## 5.3 Schnittstellen des Programmes

### 5.3.1 JSON - Datenformat der Ein- und Ausgabedaten

Für die Erstellung, Nutzung und Weiterentwicklung des Berechnungsprogrammes ist es notwendig ein strukturiertes Datenformat für die Datenein-, -weiter- und -ausgabe zu verwenden. Darüber hinaus ist es sinnvoll, dass die notwendigen Ein- und Ausgabedaten auch außerhalb der Software möglichst plattformunabhängig gelesen und bearbeitet werden können. Durch diese Anwendungsfreiheit wird der Nutzer in die Lage versetzt, das Gesamtsystem möglichst einfach in seine Arbeitsabläufe zu integrieren, was essentiell für eine zukünftige Anwendung und Weiterentwicklung des Programmes ist. Bei dem Datenformat, für das sich die Bearbeiter des Forschungsprojektes entschieden haben und was all diesen Anforderungen gerecht wird, handelt es sich um **JSON**.

JSON (JavaScript Object Notation) ist ein von Douglas Crockford spezifiziertes, kompaktes Datenformat, was in einer einfach lesbaren Textform existiert und mit einfachen Datenstrukturen einen plattformunabhängigen Datenaustausch ermöglicht. Neben dem Nullwert (*null*) besteht JSON aus den Elementen Boolescher Wert (*true* und *false*), Zahl, Zeichenkette (in Anführungsstrichen “ ”), Array (in Klammern [ ]) und Objekt (in Klammern { }), die entsprechend der Regeln beliebig verschachtelt werden können (siehe Bild 5.3).

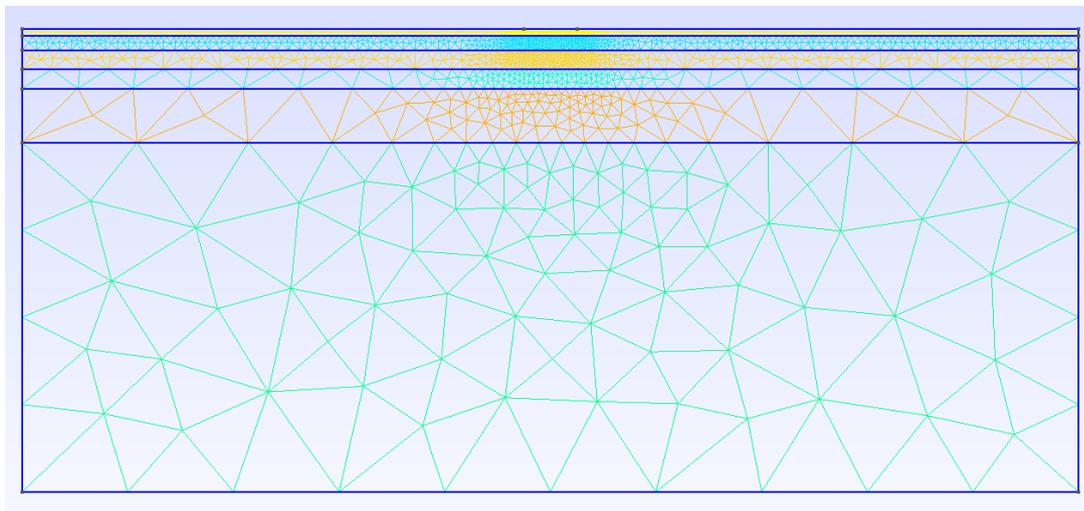
JSON wurde erstmals 2001 auf der Website [www.json.org](http://www.json.org) vorgestellt. Aktuelle Spezifikationen sind die RFC 8259 (Internet Engineering Task Force (IETF) 2017), sowie



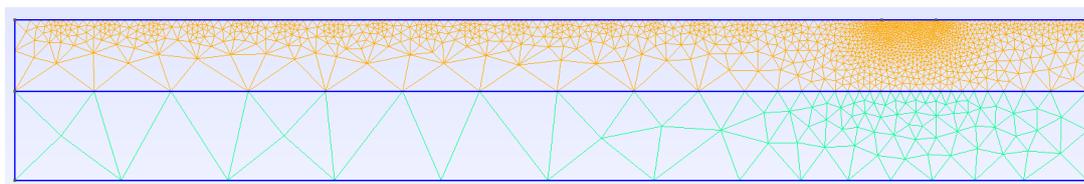
herum um die dort auftretenden Gradienten akkurat abbilden zu können. Bild 5.4b hingegen zeigt einen reinen Demonstrationsaufbau mit 2 Schichten und einer nach rechts versetzten Last.

Auch die Angabe von Banketten und damit eine realistischere seitliche Lagerung ist problemlos möglich (Abschnitt 4.4), allerdings nicht in den RDO vorgesehen. Daher ist derzeit nicht bekannt, wie diese für die Simulation ausgebildet werden sollten.

Weiterhin bereitet die automatisierte Generierung der Interface-Elemente noch Probleme. Es existieren verschiedene Plug-Ins für GMSH zur Generierung von solchen „zerthickness“-Elementen<sup>1 2</sup>. Die Versuche hiermit haben bislang leider nicht zum Erfolg geführt.



(a) Aufbau nach Tafel 1, Zeile 1, Bk100 der *Richtlinien für die Standardisierung des Oberbaus von Verkehrsflächen RStO* mit Vernetzung mit Dreiecken.



(b) Aufbau mit 2 Schichten und nach rechts versetzter Reifenlast.

Bild 5.4: Beispiele möglicher Aufbauten und Netze.

<sup>1</sup>[https://github.com/tjolsen/Mesh\\_Uutilities/tree/master/gmsh\\_crack](https://github.com/tjolsen/Mesh_Uutilities/tree/master/gmsh_crack)

<sup>2</sup><https://gitlab.onelab.info/gmsh/gmsh/blob/master/Plugin/Crack.cpp>

## Ergänzende Informationen

Das mit GMSH erstellte Netz wird ins ABAQUS-Format exportiert. Bevor es durch den ABAQUS-Parser gelesen werden kann, müssen zusätzliche Informationen wie Materialparameter, Randbedingungen und Schrittdefinitionen ergänzt werden um eine komplette Simulation zu definieren. Dies wird durch einen vorformatierten „Dummy“ erreicht, der mit den aus JSON eingelesenen Informationen komplettiert und an die aus GMSH exportierte Datei angehängt wird.

### ABAQUS-Parser

Der (FS)FEM-Rechenkern kann nicht direkt mit den JSON-Dateien arbeiten sondern benötigt spezialisierte Formate zur Übergabe des Netzes, der Randbedingungen, u.s.w. Hier wird das durch das kommerzielle FE-Programm ABAQUS verwendet Format genutzt. Es handelt sich ebenso wie bei JSON um ein menschenlesbares und editierbares Format, das unter anderem auch vom quelloffenen FE-Code CalculiX<sup>3</sup> genutzt wird. Ein Beispiel für eine lauffähige Eingabedatei ist folgend angegeben.

```
1 *Heading
2 Hier kann beliebige Information stehen.
3 Auch mehrere Zeilen lang.
4 *NODE
5 1, 0, 0, 0
6 2, 2, 0, 0
7 3, 0, 1, 0
8 4, 2, 1, 0
9 ***** E L E M E N T S *****
10 *ELEMENT, type=CPS3, ELSET=Surface21
11 2, 1, 4, 3
12 3, 1, 2, 4
13 *ELSET,ELSET=rectangle
14 2, 3,
15 *NSET,NSET=xMax
16 2, 4,
17 *NSET,NSET=rectangle
18 3, 2, 4, 1,
19 ***** Sections *****
20 *SOLID SECTION, ELSET=rectangle, MATERIAL=elastic
21 1
22 *MATERIAL, NAME=elastic
23 *ELASTIC
24 1000, 0.3
25 **
26 *STEP, NLGEOM=No, inc=100
27 step 1
28 *STATIC
29 1.0, 1.0, 0.1, 1.0
30 *BOUNDARY
31 1, 1, 2
32 3, 1, 1
```

---

<sup>3</sup>[www.calculix.de](http://www.calculix.de)

```
33 xMax, 1, 1, 0.2
34 *END STEP
```

Schlüsselworte sind durch einen \* gekennzeichnet, und leiten beispielsweise die Knotendefinition mit \*NODE ein. Die mehrfache Angabe von \* stellt einen Kommentar dar, der durch den Parser ignoriert wird. Der Parser hat die Bezeichnung `readABQInputFile` und deckt einen Teil des Befehlssatzes von ABAQUS ab. Für das vorliegende Projekt wird die Befehlsabdeckung als ausreichend angesehen. Bei Bedarf ist der Parser natürlich erweiterbar.

Auch bei der Entwicklung des Parsers lag ein Fokus auf einer möglichst performanten Implementierung. Als Beispiel sei an dieser Stelle genannt, dass das blockweise Einlesen der Knotendefinitionen mittels des Matlab-Befehls `textscan` hier einen massiven Geschwindigkeitsvorteil gegenüber dem zuvor umgesetzten zeilenweisen Einlesen gebracht hat. Dies ist in der Unterfunktion des Parsers `coordsABQInputFile` umgesetzt.

```
1 function [coords] = coordsABQInputFile(infile, start)
2     frewind(infile);
3     coords = textscan(infile, '%f%f%f', 'Headerlines',...
4         start-1, 'CollectOutput', true, 'Delimiter', ',');
5     coords = coords{1}(:,2:end);
6 end
```

Beim Export der Netze aus GMSH stellte sich heraus, dass GMSH sich bei der Definition von Oberflächennetzen, die für die Angabe der Randbedingungen wichtig sind, nicht strikt an die ABAQUS-Syntax hält. Daher wurden im Parser zwei verschiedene Routinen implementiert: `surfacesABQInputFile` und `surfacesGMSHInputFile`. Die Fallunterscheidung trifft der Parser automatisch. Der Nutzer bekommt hiervon nichts mit.

# 6 AP 600: Erstellung des lauffähigen Programmes, Parameterstudie und Überprüfung des Gesamtsystems

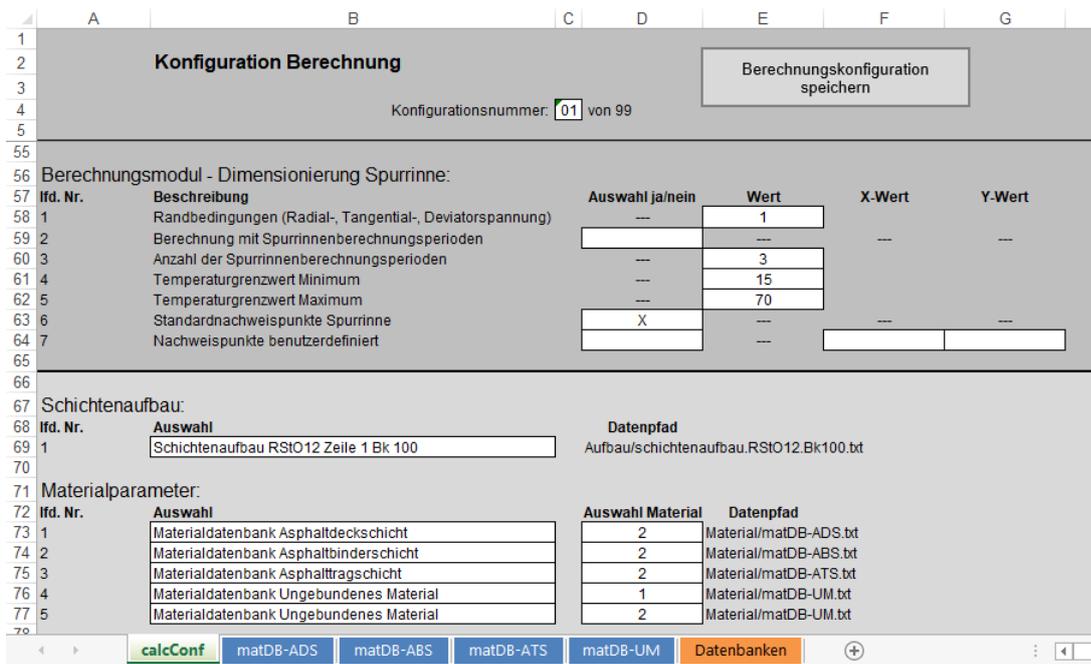
## 6.1 Benutzeroberfläche zur Programmsteuerung

Für die Auswahl der gewünschten Eingabedaten und die Steuerung des Berechnungsprozesses muss der Anwender in die Lage versetzt werden, das Programm nach seinen Vorstellungen zu konfigurieren. Dabei spielen nicht nur die Optik und die Ergonomie eine Rolle, sondern auch die Anpassungsfähigkeit der grafischen Benutzeroberfläche an die Entwicklungen des darunterliegenden Programmes.

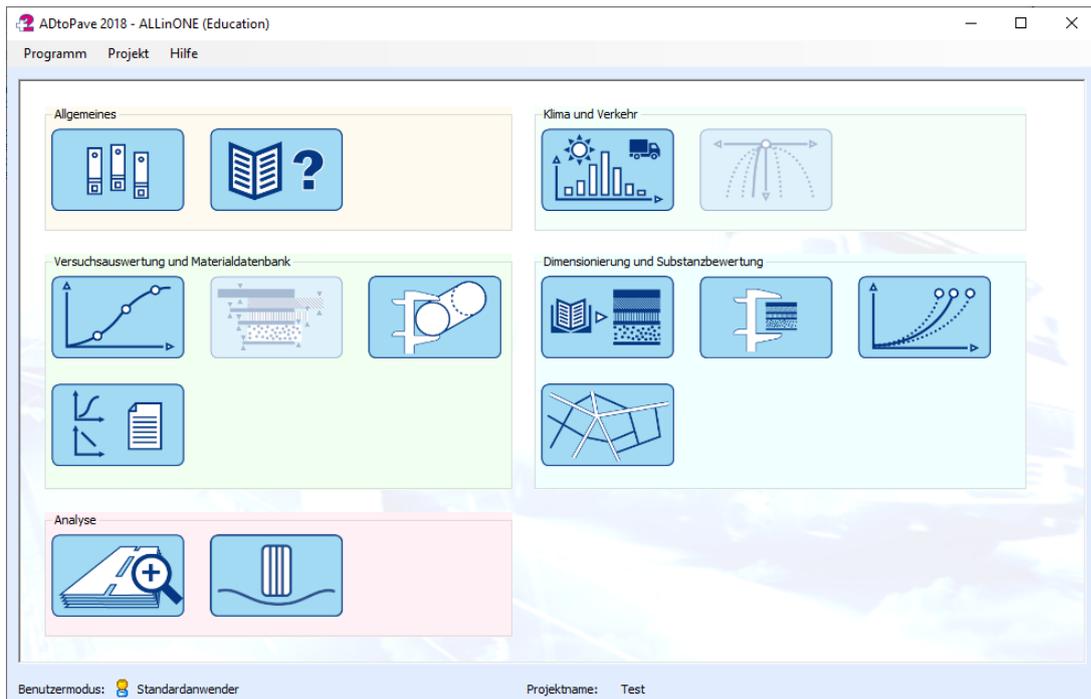
Wird zum Beispiel ein Programm hauptsächlich für die Forschung verwendet, ist es notwendig, dass Berechnungs- und Materialmodelle schnell und unkompliziert geändert und integriert werden können. Dadurch muss auch die Benutzeroberfläche so flexibel sein, dass sie schnell an die neue Art der Anwendung angepasst werden kann. So können neue Berechnungsmodelle für das Ermüdungs- und Spurrinnenverhalten von Asphalt relativ einfach in das „Forschungsprogramm Straßenbau“ (ForProS), was an der Professur für Straßenbau der Technischen Universität Dresden entwickelt wurde, eingearbeitet und anschließend getestet werden. Auch neue Ansätze für die Berechnung der Materialsteifigkeit, der Querdehnzahl und des Schichtenverbundes können damit variiert und untersucht werden. Um mit der Benutzeroberfläche auf diese Flexibilität des Programmes entsprechend reagieren zu können, erfolgt die Konfiguration über eine Excel-Tabelle (siehe Bild 6.1a).

Anwendungsprogramme, wie zum Beispiel das „Analysing and Design Tool for Pavements“ (ADtoPave), besitzen eine aufwändige, strukturierte und benutzerorientierte Programmoberfläche (siehe Bild 6.1b), um die Nutzung möglichst einfach und selbsterklärend zu machen. Durch dieses Korsett kommt der Anwender relativ schnell zum gewünschten Ergebnis und mögliche fehlerhafte Eingaben durch den Nutzer können durch die Struktur verhindert werden. Der Nachteil dieser Strukturierung ist, dass dieses Programm und die damit verbundene Benutzeroberfläche nur mit relativ großem Aufwand auf neue Anforderungen angepasst werden kann.

Damit eine zufriedenstellende Anwendung der zu entwickelnden Software gewährleistet werden kann, ist eine Absprache hinsichtlich der geplanten Nutzung notwendig. Mithilfe



(a) Benutzeroberfläche von ForProS in Microsoft Excel



(b) Benutzeroberfläche von ADtoPave

Bild 6.1: Beispielhafte Benutzeroberflächen von Berechnungs- und Dimensionierungsprogrammen für Asphalt.

dieser Zielvorgabe kann eine anwendungs- und anwenderfreundliche Benutzeroberfläche gestaltet werden.

Im Augenblick befindet sich das Programm noch in der Entwicklung, weswegen es bisher nur eine einfache, aber flexible Arbeitsbenutzeroberfläche gibt (siehe Bild 6.2). Damit kann das Programm schnell und einfach konfiguriert und neue Programmteile getestet werden.

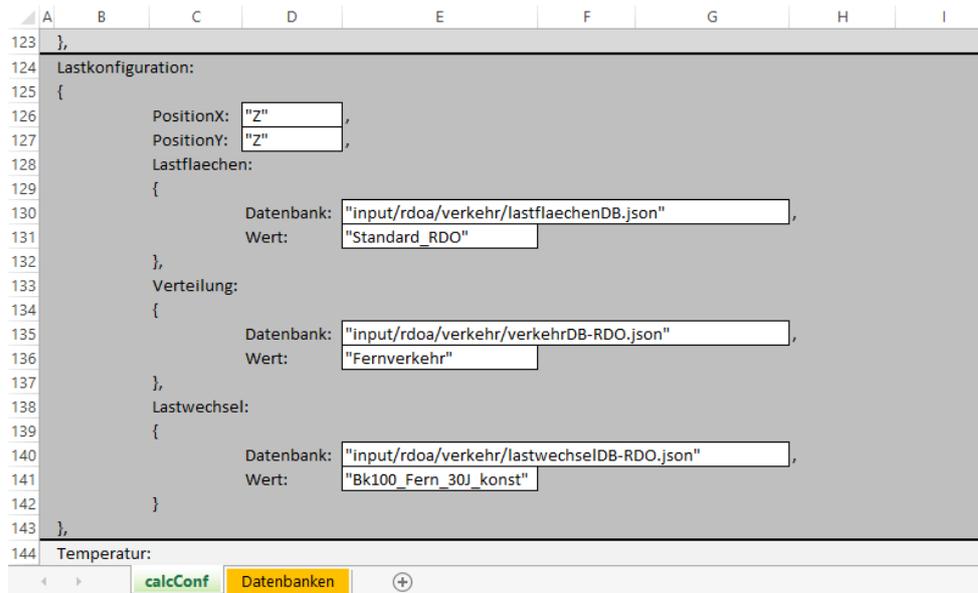


Bild 6.2: Arbeitsbenutzeroberfläche von FSFEM in Microsoft Excel - beispielhaft zur Konfiguration der Lastkonfiguration in JSON (siehe Bild 5.3a).

## 6.2 Überprüfung des Gesamtsystems

Das finale Berechnungsprogramm `flexCALC` beinhaltet zwei Rechenkerne, den Fourier-unterstützten Finite Elemente Rechenkern (`FSFEM`) und den Rechenkern basierend auf der Mehrschichtentheorie (`MST`). Um die korrekte Funktionsweise der entwickelten Rechenkerne und der angebotenen Berechnungsalgorithmen (gemäß den RDO Asphalt und den RSO Asphalt) aufzuzeigen, wurden Vergleichsrechnungen mit `ADtoPave` (IDAV GmbH 2020) durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in Abschnitt 8.1 zusammengefasst. Auf eine vergleichende Gegenüberstellung von mit verschiedenen Programmen berechneten Beanspruchungszuständen wird an dieser Stelle daher verzichtet.

Für die grundsätzliche Überprüfung des Finite Elemente Rechenkerns des entwickelten Berechnungsprogramms `flexCALC` hinsichtlich Plausibilität bei Betrachtung von Belastungszuständen, die von den in den RDO Asphalt genannten Standardfällen abweichen, wurden für einen Konstruktionsaufbau und einen definierten Belastungszustand Berechnungen bei variierender Lastposition und Randausbildung durchgeführt.

Nachfolgend werden der gewählte Konstruktionsaufbau und die gewählten Modellannahmen für ein dreidimensionales Modell näher erläutert.

Konstruktionsaufbau:

- 5 Konstruktionsschichten: Asphaltdeckschicht (ADS, 40 mm), Asphaltbinderschicht (ABS, 80 mm), Asphalttragschicht (ATS, 290 mm), Frostschuttschicht (FSS, 390 mm), Untergrund (UG, 2000 mm); Die Schichtdicken der Asphalttragschicht und der Frostschuttschicht wurden so festgelegt, dass bei Annahme einer Gesamtdicke des frostsicheren Oberbaus von 80 cm in jedem Fall eine prognostizierte Nutzungsdauer von mindestens 30 Jahren erreicht wird (vgl. Bild 6.3a).
- Schichtenverbund: Da die Interface-Elemente nicht in `FSFEM` zur Verfügung stehen wurde fester Verbund zwischen allen Schichten angenommen.

Materialeigenschaften:

- Asphaltsschichten: Materialparameter der Kalibrierasphalte für ADS, ABS und ATS gemäß Entwurf der überarbeiteten Version der RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2021)
- ungebundene Konstruktionsschichten: konstanter Schichtmodul für alle Materialien von 150 MPa

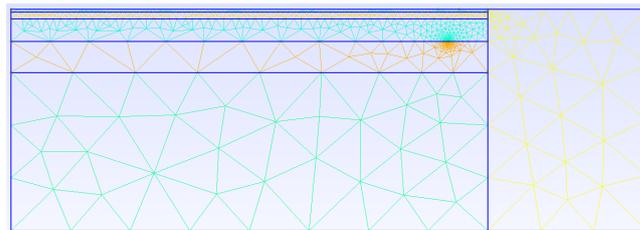
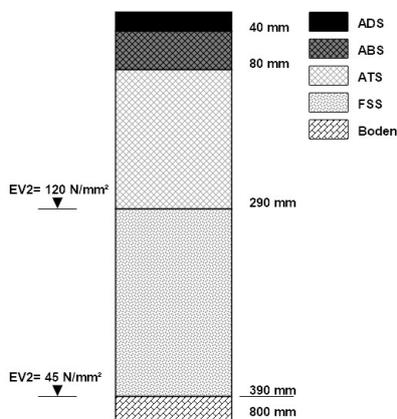
Belastungszustand:

- Verkehrsbelastung: Berechnung für eine Achslast von 10t bzw. für eine Radlast von 5t.
- Reifenkontaktfläche: Quadrat mit der Kantenlänge  $\sqrt{\pi * 150^2} \approx 265,87$  mm.

- Reifenkontaktdruckverteilung: konstant, gemäß den RDO Asphalt.
- Temperaturzustand: Berechnung für eine charakteristische Oberflächentemperatur von  $-12,5^{\circ}\text{C}$  und den ersten normierten charakteristischen Temperaturänderungsverlauf gemäß dem Entwurf der überarbeiteten Version der RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2021)

Modellgeometrie und Lastposition, siehe auch Bild 6.3b:

- Vergleich von drei unterschiedlichen Belastungszuständen, woraus unterschiedliche Modellgeometrien und Lastpositionen resultieren:
  - (a) Modellausdehnung in x-Richtung: 6 m; Lastposition: mittig
  - (b) Modellausdehnung in x-Richtung: 6 m; Lastposition: 0,5 m vom rechten Rand entfernt
  - (c) Modellausdehnung in x-Richtung: 8 m, davon 6 m Asphaltbefestigung und rechts ergänzt durch 2 m Bankett; Lastposition: 2,5 m vom rechten Rand entfernt
- Randbedingungen wie für das Verifikationsproblem in Abschnitt 2.1.9 beschrieben. Alle Freiheitsgrade unten und an den Rändern links und rechts fixiert. In Richtung des Fourier-Ansatzes ergibt sich aufgrund von Gleichung 2.20, dass die Verschiebungen in Ansatzrichtung nicht beschränkt werden können.



- (a) Konstruktionsaufbau zur Überprüfung des Gesamtsystems hinsichtlich variierender Lastpositionen.
- (b) Netz des Konstruktionsaufbaus inklusive Bankett zur Überprüfung des Gesamtsystems hinsichtlich variierender Lastpositionen.

Auf Grundlage der aufgelisteten Modellannahmen wurden mit **FSFEM** Vergleichsrechnungen durchgeführt. In Bild 6.4 und Bild 6.5 sind die für die aufgeführten unterschiedlichen Lastpositionen berechneten Beanspruchungszustände exemplarisch für die

Spannung in Querrichtung der Straße und die vertikale Verschiebung dargestellt. Die Berechnung erfolgte gemäß Auflistung für einen Belastungszustand.

Die Visualisierung der berechneten Beanspruchungszustände wurde durch die Anbindung des Programms **ParaView** realisiert.

Ausgehend von einer qualitativen Einschätzung der dargestellten Ergebnisse können die Berechnungsergebnisse grundsätzlich als plausibel gewertet werden, siehe insbesondere die Druckspannungen auf der Oberseite und die Zugspannungen auf der Unterseite des Asphaltpakets in Bild 6.4a.

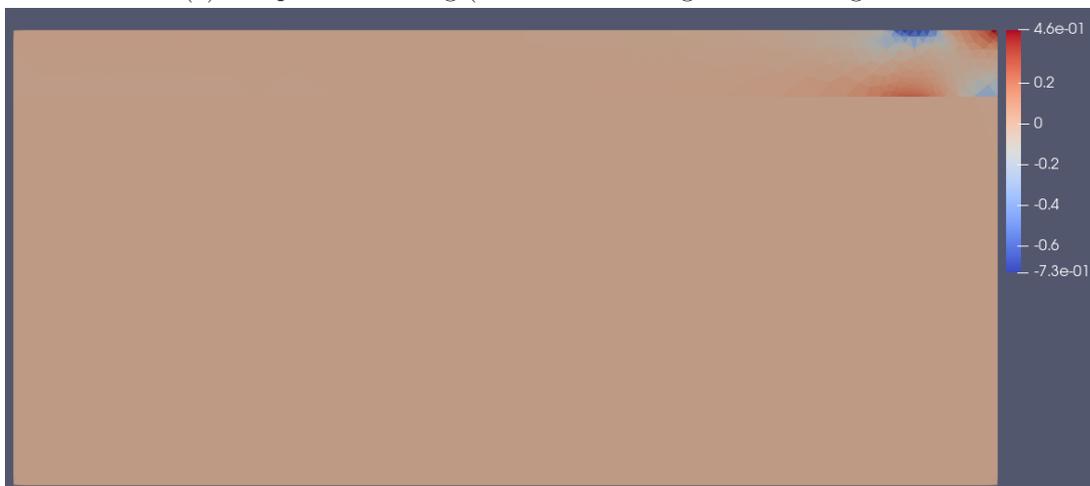
Die Spannungsverteilung ändert sich deutlich bei Randstellung, siehe Bild 6.4b. Die Verteilung ist aufgrund der gewählten Randbedingungen allerdings mutmaßlich nicht realistisch. Eine ungehinderte Verschiebung der dortigen Knoten ist allerdings ebenso wenig realistisch.

Für die Untersuchung von Randbelastungen wird daher empfohlen, das Berechnungsmodell am Rand durch die Anbindung eines Banketts zu erweitern, siehe Bild 6.4c. Hierdurch wird ein realistischeres Lagerungsverhalten abgebildet.

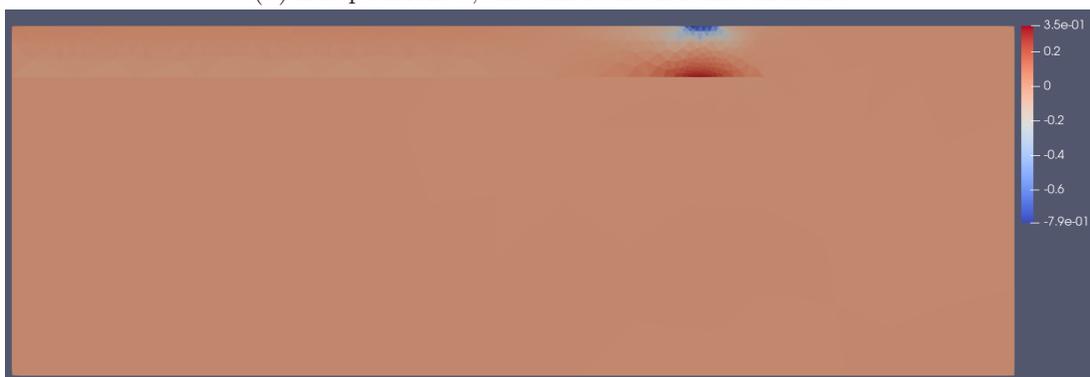
Diese Überlegungen gelten analog für die in Bild 6.5 dargestellten Vertikalverschiebungen.



(a) Lastposition: mittig (Modellausdehnung in x-Richtung: 6 m)

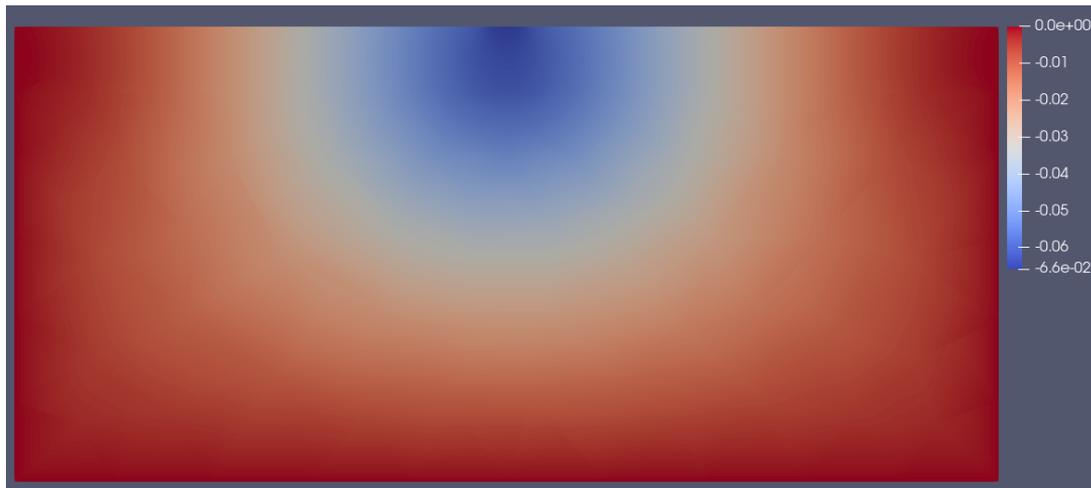


(b) Lastposition: 0,5 m vom rechten Rand entfernt.

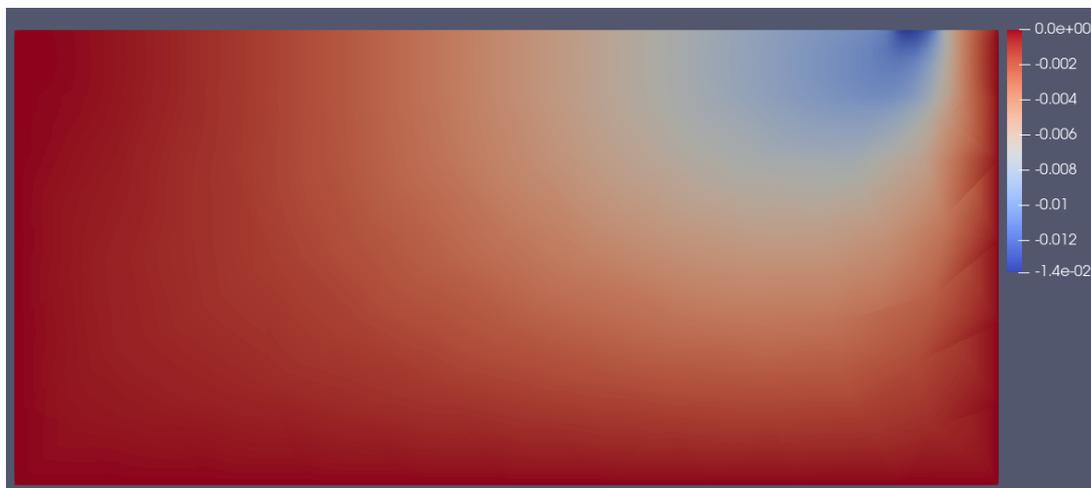


(c) Lastposition: 2,5 m vom rechten Rand bzw. 0,5 m vom linken Rand des Banketts entfernt. Das Bankett ist 2 m breit.

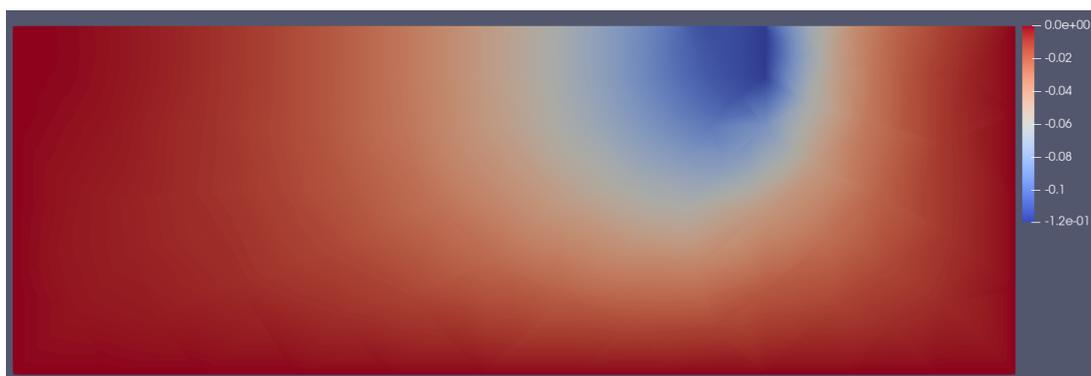
Bild 6.4: Vergleich verschiedener Beanspruchungszustände aufgrund unterschiedlicher Lastpositionen; Darstellung der horizontalen Spannung. Die Breite des Straßenkörpers beträgt 6 m.



(a) Lastposition: mittig.



(b) Lastposition: 0,5 m vom rechten Rand entfernt.



(c) Lastposition: 2,5 m vom rechten Rand bzw. 0,5 m vom linken Rand des Banketts entfernt. Das Bankett ist 2 m breit.

Bild 6.5: Vergleich verschiedener Beanspruchungszustände aufgrund unterschiedlicher Lastpositionen; Darstellung der vertikalen Verschiebung. Die Breite des Straßenkörpers beträgt 6 m.

## 7 AP 700: Rückrechnungsverfahren für die Bewertung der strukturellen Substanz

„Rückrechnung“ bezeichnet die Ableitung von Struktur- und Materialparametern des Straßenaufbaus aus geeigneten Messverfahren. Dazu ist in der Regel Wissen über den Schichtenaufbau notwendig. Als Messgröße werden meist die Deflektionen der Oberseite des Straßenkörpers verwendet. Hierzu stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung, wie bspw. der Benkelman-Balken, Falling-Weight-Deflectometer, Lacroix-Deflectograph, Curviametro oder das Traffic-Speed-Deflectometer. Benkelman-Balken und Falling-Weight-Deflectometer sind stationäre Verfahren, die übrigen genannten Verfahren sind mobil, teilweise sind die erzielbaren Geschwindigkeiten aber realitätsfern. Wünschenswert ist beispielsweise die Ermittlung (Rückrechnung) der Moduln der einzelnen Schichten.

Meist wird für die Rückrechnung ein Mehrschichten-Modell verwendet. Die Gültigkeit einschränkende Annahmen sind u.a. statische Belastung, Elastizität, Isotropie und ein unendlich ausgedehnter Halbraum als Untergrund. Die Moduln der Einzelschichten werden in einem iterativen Verfahren so lange variiert, bis eine zulässige Abweichung der gemessenen von der berechneten Deflektionsmulde erreicht wird.

Die Forschungsprojekte FE88.0137 und FE88.0138 „In-Motion“ (Oeser, Wang, Otto u. a. 2016) setzen dagegen auf die Kombination aus einem FE-Programm und künstlichen neuronalen Netzen (KNN). Für das Training von KNN werden sehr viele Datensätze benötigt, die einen Zusammenhang zwischen Deflektionen und Struktur- und Materialeigenschaften herstellen. In der Regel steigt mit der Größe des Trainingsdatensatzes die Vorhersagequalität eines KNN, solange das Problem korrekt gestellt ist.

Um nun zu solchen Daten zu gelangen ist es zielführend automatisiert viele Berechnungen durchzuführen, die in einem geeigneten Parameterraum liegen. Da im Voraus nicht gesagt werden kann welche konkreten Daten zum Training des KNN herangezogen werden, ist es sinnvoll zunächst möglichst viele Daten der Berechnung zu speichern. So ist es beispielsweise nicht sinnvoll nur einen einzelnen Wert der Deflektion, etwa im Scheitelpunkt, zu speichern. Für die Rückrechnung von TSD-Überrollungen etwa wäre es sinnvoll die komplette asymmetrische Deflektionsmulde zu kennen. Es wird daher vorgeschlagen die gesamten berechneten Feldgrößen zu sichern.

Die hohe Anzahl an Rechnungen wird idealerweise automatisiert ausgeführt. Daher wurde ein Skript erstellt, das dies ermöglicht. Es werden zweierlei Typen von Eingabedateien akzeptiert, die alle in einem zu spezifizierenden Unterverzeichnis liegen müssen. Es ist möglich entweder direkt Eingabedateien für den **FSFEM**-Rechenkern (**ABAQUS**-Format) zu spezifizieren, oder die Eingabedateien für **flexCALC** im **JSON**-Format. Daher ist es auch möglich Ergebnisse der Mehrschichtentheorie zu verwenden, allerdings werden hier keine Feldgrößen berechnet sondern nur Punktwerte.

# 8 AP 800: Anbindung des Programms an die RDO Asphalt und die RSO Asphalt inklusive Kalibrierung

Nachdem die beiden Rechenkerne erstellt wurden, erfolgte die Integration aller Einzelkomponenten in das modulare Gerüst des Gesamtprogramms `flexCALC`. Die Fertigstellung des Gesamtprogramms beinhaltet außerdem die Weiterverarbeitung berechneter Beanspruchungszustände, zum einen hinsichtlich sich anschließender Bemessungs- und Bewertungsaufgaben und zum anderen hinsichtlich der Visualisierung von Beanspruchungszuständen. Letzteres wurde durch die Anbindung des Programms `ParaView` realisiert.

Zur Durchführung von Bemessungs- und Bewertungsaufgaben wurden die Vorgehensweisen beschrieben in den RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009), bzw. im Entwurf der deren überarbeiteten Version (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2021), sowie in den RSO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018) in das Gesamtprogramm integriert. Mit dem entwickelten Programm können sowohl Berechnungen nach deterministischer als auch nach probabilistischer Verfahrensweise durchgeführt werden. Die Ergebnisse der Verifikation der Einbindung beider Methoden werden in Abschnitt 8.1 diskutiert. Auf die im Rahmen des zugrundeliegenden Forschungsvorhabens durchzuführende Kalibrierung wird in Abschnitt 8.2 eingegangen.

## 8.1 Verifikation des Programms

Das finale Berechnungsprogramm `flexCALC` beinhaltet zwei Rechenkerne, den Fourier-supported Finite Elemente Rechenkern (FSFEM) und den basierend auf der Mehrschichtentheorie (MST). Um die korrekte Funktionsweise der entwickelten Rechenkerne und der angebotenen Berechnungsalgorithmen aufzuzeigen, wurden Vergleichsrechnungen mit `ADtoPave` (IDAV GmbH 2020) durchgeführt.

Zum Nachweis der korrekten Anbindung der deterministischen Verfahrensweise wurden für zwei Berechnungsbeispiele (Verifikationsmodelle) die nach den RDO Asphalt (Abschnitt 8.1.1) berechneten Restnutzungsdauern verglichen. Zur Verifizierung der probabilistischen Verfahrensweise gemäß den RSO Asphalt (Abschnitt 8.1.2) wurde

lediglich das zweite Verifikationsmodell in Anwendung gebracht und berechnete Ausfallwahrscheinlichkeiten verglichen.

### 8.1.1 Vergleichsrechnungen gemäß den RDO Asphalt

Zur Verifizierung der Einbindung der deterministischen Verfahrensweise gemäß den RDO Asphalt wurden Berechnungen mit dem Finite Elemente Rechenkern und dem Rechenkern basierend auf der Mehrschichtentheorie durchgeführt und den Vergleichsrechnungen mit ADtoPave (IDAV GmbH 2020) gegenübergestellt.

Folgende Berechnungsmodelle wurden definiert:

- Verkehrsbelastung: Achslastkollektiv (BAB Fernverkehr), Anzahl und Größe der Achslastklassen und Annahmen hinsichtlich Lasteinleitung (Reifenkontaktfläche und Verteilung Reifenkontaktdruck) gemäß den RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009), Anzahl der jährlichen Achsübergänge: 10 101 375,00 (Annahme: keine Zunahme des jährlichen Schwerverkehrsanteils);
- Temperaturzustände: 13 charakteristische Oberflächentemperaturen; Variation der Temperatur- bzw. Temperaturänderungsverläufe innerhalb der Konstruktion und dazugehöriger Häufigkeitsverteilungen der charakteristische Oberflächentemperaturen gemäß (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009) bzw. (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2021)
  - Verifikationsmodell 1: Temperaturverläufe und Häufigkeitsverteilungen für die Zone 3 gemäß den RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009)
  - Verifikationsmodell 2: normierte charakteristische Temperaturänderungsverläufe nach Kayser (2007) und Häufigkeitsverteilungen für die Zone 3 gemäß dem Entwurf der überarbeiteten Version der RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2021)
- Konstruktionsaufbau: 5 Schichten (Asphaltdeckschicht (ADS), Asphaltbinder-schicht (ABS), Asphalttragschicht (ATS), Frostschutzschicht (FSS), Untergrund (UG)); Die Schichtdicken der Asphalttragschicht und der Frostschutzschicht wurden so festgelegt, dass bei Annahme einer Gesamtdicke des frostsicheren Oberbaus von 80 cm in jedem Fall eine prognostizierte Nutzungsdauer von mindestens 30 Jahren erreicht wird. Unterschiede in den festgelegten Schichtdicken variieren aufgrund der unterschiedlichen thermischen Beanspruchungszustände, die sich gemäß (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009) und (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2021) ergeben.
  - Verifikationsmodell 1: gemäß Bild 8.1a (ADS 40 mm, ABS 80 mm, ATS 240 mm; FSS 440 mm)

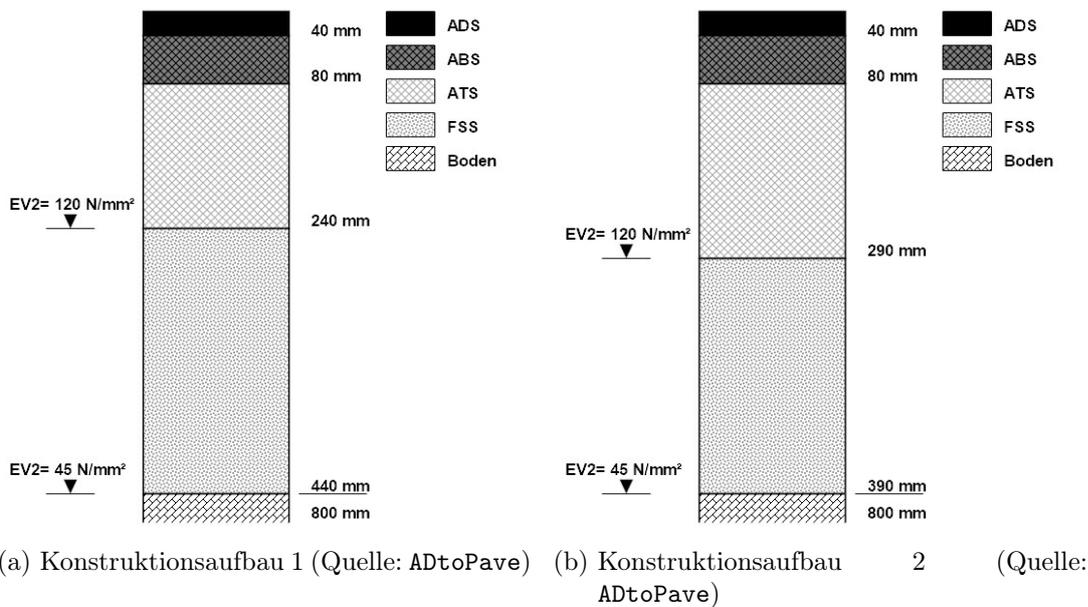


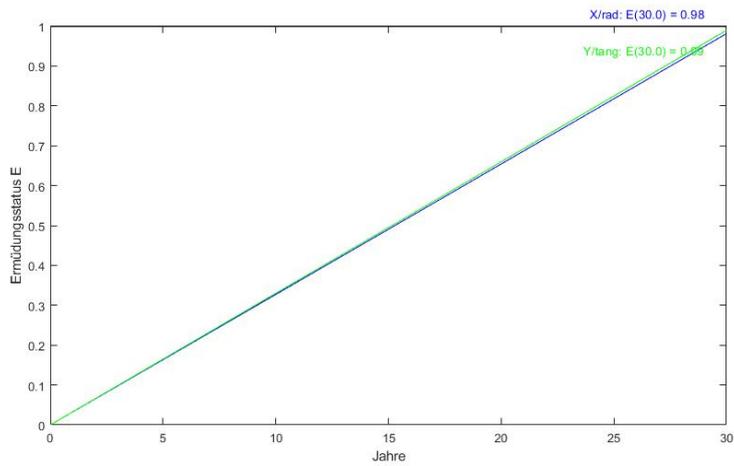
Bild 8.1: Konstruktionsaufbauten der Verifikationsrechnungen zwischen flexCALC und ADtoPave.

– Verifikationsmodell 2: gemäß Bild 8.1b (ADS 40 mm, ABS 80 mm, ATS 290 mm; FSS 390 mm)

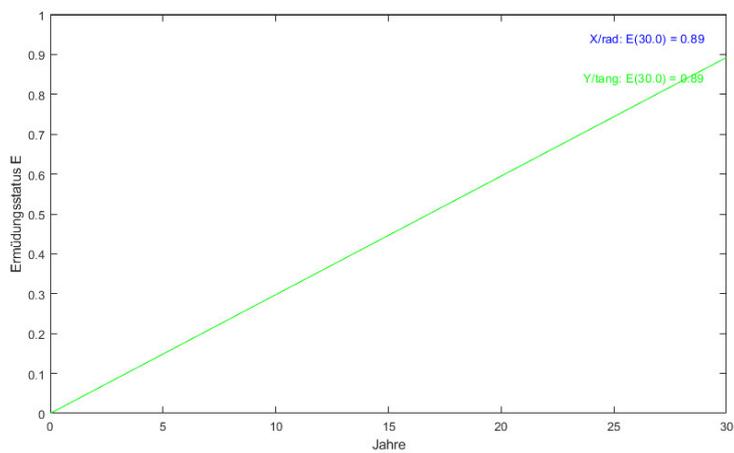
- Materialien: Materialparameter der Kalibrierasphalte für ADS, ABS und ATS gemäß Entwurf der überarbeiteten Version der RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2021); Frostschuttschicht mit einem Schichtenmodul von 146 MPa (Verifikationsmodell 1 beziehungsweise 150 MPa (Verifikationsmodell 2; Die unterschiedlichen Schichtmoduln resultieren aus den unterschiedlichen Schichtdicken der Frostschuttschicht
- Schichtenverbund: Ausbildung des Schichtenverbundes gemäß den RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009); fester Verbund nur zwischen gebundenen Schichten
- Nachweispunkt: in der Lastachse, an der Unterseite der Asphalttragschicht

Auf Grundlage der aufgelisteten Modellannahmen wurden mit den beiden entwickelten Rechenkernen und dem Programm ADtoPave Dimensionierungsberechnungen durchgeführt und die prognostizierten Ermüdungsstatus verglichen. In Tabelle 8.1 sind die berechneten Ermüdungsstatus jahresweise zusammengefasst. Eine grafische Darstellung der Berechnungsergebnisse für beide Verifikationsmodelle wird in Bild 8.2 und Bild 8.3 geboten.

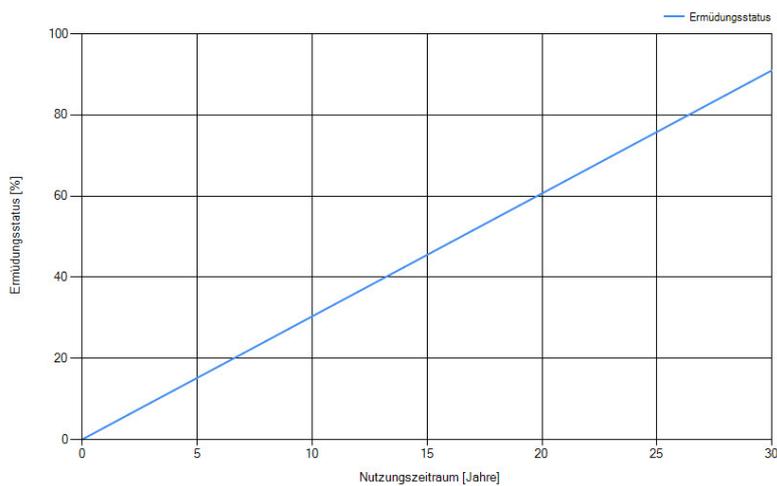
Bei Anwendung des Finite Elemente Rechenkerns ergeben sich in x- und y-Richtung aufgrund der Verwendung des Fourier-Ansatzes unterschiedliche Berechnungsergebnis-



(a) Ermüdungsstatus flexCALC - Finite Elemente Methode (FSFEM).

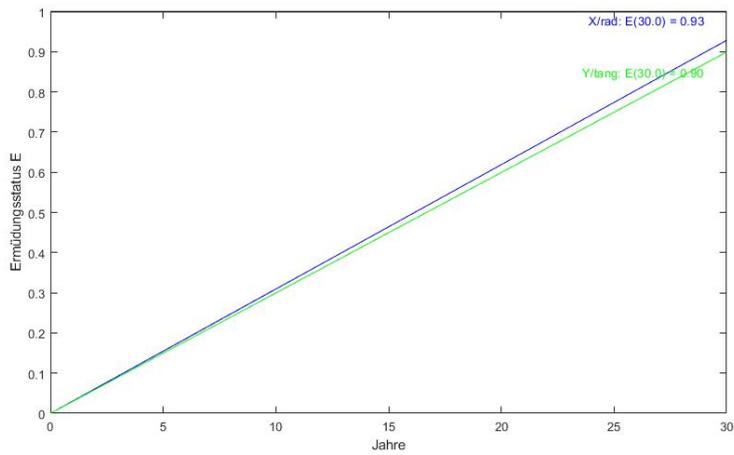


(b) Ermüdungsstatus flexCALC - Mehrschichtentheorie (MST).

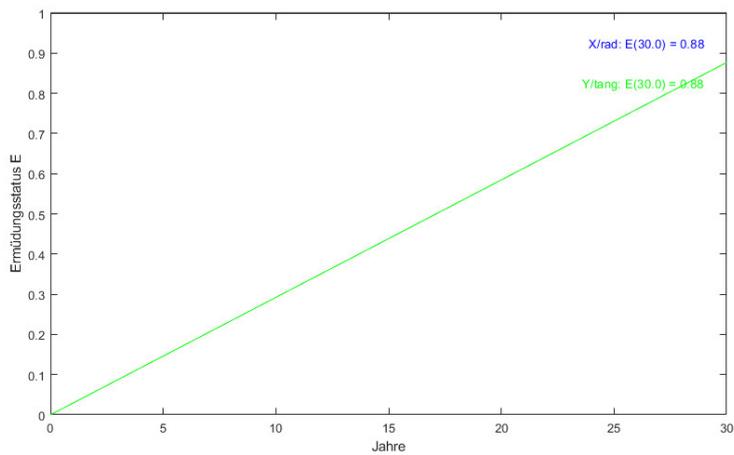


(c) Ermüdungsstatus ADtoPave - Mehrschichtentheorie (MST).

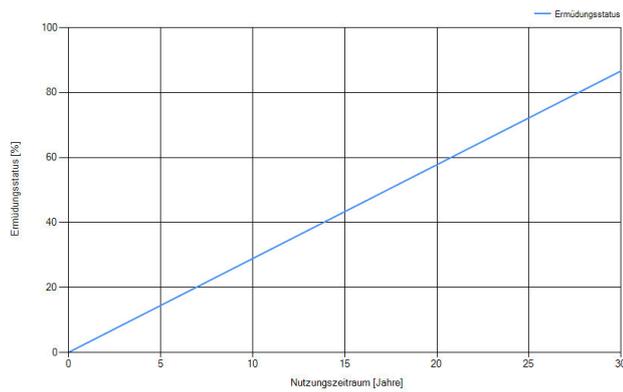
Bild 8.2: Vergleich der Ergebnisse des Ermüdungsstatus der Verifikationsrechnung 1 zwischen flexCALC und ADtoPave gemäß den RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009).



(a) Ermüdungsstatus flexCALC - Finite Elemente Methode (FSFEM).



(b) Ermüdungsstatus flexCALC - Mehrschichtentheorie (MST).



(c) Ermüdungsstatus ADtoPave - Mehrschichtentheorie (MST).

Bild 8.3: Vergleich der Ergebnisse des Ermüdungsstatus der Verifikationsrechnung 2 zwischen flexCALC und ADtoPave gemäß den RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009).

Nutzungs- jahr	Verifikationsmodell 1			Verifikationsmodell 2		
	flexCALC		ADtoPave	flexCALC		ADtoPave
	FSFEM	MST	MST	FSFEM	MST	MST
1	3,29	2,98	3,03	3,05	2,92	2,89
2	6,57	5,95	6,07	6,09	5,85	5,78
3	9,86	8,93	9,10	9,14	8,77	8,66
4	13,15	11,90	12,13	12,19	11,69	11,55
5	16,43	14,88	15,16	15,24	14,62	14,44
6	19,72	17,85	18,20	18,28	17,54	17,33
7	23,00	20,83	21,23	21,33	20,46	20,22
8	26,28	23,81	24,26	24,37	23,39	23,10
9	29,57	26,78	27,29	27,42	26,31	25,99
10	32,85	29,76	30,33	30,46	29,23	28,88
11	36,14	32,73	33,36	33,51	32,16	31,77
12	39,43	35,71	36,39	36,56	35,08	34,66
13	42,71	38,68	39,43	39,61	38,00	37,54
14	46,00	41,66	42,46	42,65	40,93	40,43
15	49,28	44,64	45,49	45,70	43,85	43,32
16	52,57	47,61	48,52	48,75	46,77	46,21
17	55,85	50,59	51,56	51,79	49,69	49,10
18	59,14	53,56	54,59	54,84	52,62	51,99
19	62,42	56,54	57,62	57,88	55,54	54,87
20	65,71	59,51	60,66	60,93	58,46	57,76
21	68,99	62,49	63,69	63,98	61,39	60,65
22	72,28	65,46	66,72	67,02	64,31	63,54
23	75,56	68,44	69,75	70,07	67,23	66,43
24	78,85	71,42	72,79	73,12	70,16	69,31
25	82,13	74,39	75,82	76,17	73,08	72,20
26	85,42	77,37	78,85	79,21	76,00	75,09
27	88,70	80,34	81,88	82,26	78,93	77,98
28	91,99	83,32	84,92	85,30	81,85	80,87
29	95,28	86,29	87,95	88,35	84,77	83,75
30	98,56	89,27	90,98	91,39	87,70	86,64
rel. Abweichung	8,33 %	-1,88 %		5,48 %	1,22 %	

Tabelle 8.1: Vergleich der Nutzungsdauern für das Verifikationsmodell 1 und 2 flexCALC und ADtoPave gemäß den RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009).

se, wobei die Abweichungen beim zweiten Berechnungsmodell größer sind. Um die richtungsabhängigen Ermüdungsstatus mit den mittels Mehrschichtentheorie berechneten Ergebnissen vergleichen zu können, wurden die Ergebnisse in x- und y-Richtung gemittelt (vgl. Tabelle 8.1). Zur Bewertung der berechneten Ermüdungsstatus wurde die relative Abweichung für das 30. Nutzungsjahr, bezogen auf den Ermüdungsstatus, errechnet mit **ADtoPave**, ermittelt. Dieser kann ebenfalls Tabelle 8.1 entnommen werden. Für das Berechnungsmodell 1 ergeben sich jeweils die größten Abweichungen, wobei die Abweichung des Ermüdungsstatus basierend auf Berechnungen mit der Finiten Elemente Methode gegenüber dem mit **ADtoPave** berechneten Ermüdungsstatus ca. 8 % beträgt. Die vorhandenen Abweichungen sind insbesondere auf unterschiedliche Lösungsalgorithmen und Randbedingungen zurückzuführen.

### 8.1.2 Vergleichsrechnungen gemäß den RSO Asphalt

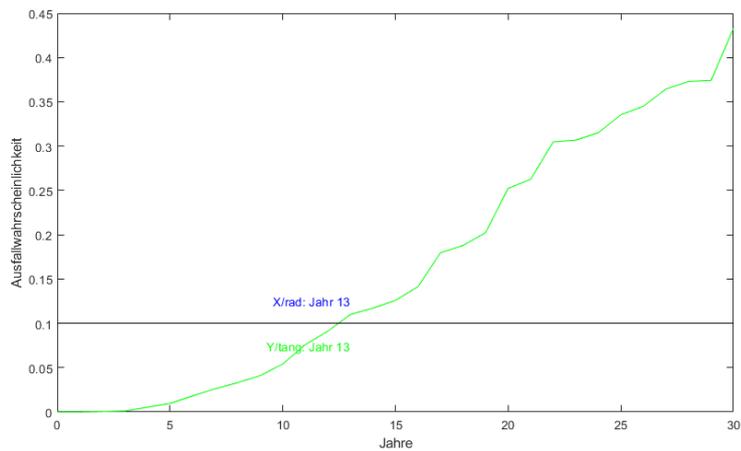
Zur Verifizierung der Einbindung der probabilistischen Verfahrensweise gemäß den RSO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018) wurden, um den Berechnungsaufwand zu begrenzen, lediglich Berechnungen mit dem entwickelten Rechenkern basierend auf der Mehrschichtentheorie und mit **ADtoPave** gegenübergestellt. Bei der probabilistischen Verfahrensweise können, im Gegensatz zur deterministischen Verfahrensweise, tatsächlich vorhandene Schichtdicken und Materialeigenschaften (im Weiteren als Stichprobe bezeichnet), sowie deren reale Streubreiten, berücksichtigt werden. In Abhängigkeit des Umfangs und der Streubreite einer Stichprobe kann eine Stichprobe in Klassen eingeteilt bzw. die Einzelwerte einer Stichprobe einer bestimmten Klassen zugeordnet werden. Entsprechend dieser Zuordnung kann jeder Klasse eine Auftretenswahrscheinlichkeit zugeordnet werden. Eine Stichprobe wird somit durch Klassengrenzen und Klassenwahrscheinlichkeiten mathematisch beschrieben. Klassenwahrscheinlichkeiten sind materialunspezifisch und nur von der Klassenanzahl abhängig. Für die Bewertung variierender Schichtdicken und Materialeigenschaften sind gemäß gültigem Regelwerk unterschiedliche Berechnungen vorgesehen. Ergänzend zu den voran genannten Bedingungen ergeben sich somit folgende Annahmen für die Berechnungen auf Grundlage der probabilistischen Verfahrensweise:

- Schichtdicken der Asphaltkonstruktion:  
Für die Berücksichtigung der Schichtdickenschwankungen der Asphaltsschichten wurde die in den RSO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018) definierte Mindestanzahl von 5 Klassen gewählt. Die zu berücksichtigende Unterschreitungswahrscheinlichkeit beträgt somit 1 %. Weitere statistische Kennwerte sind:
  - Größe der Stichprobe: 6
  - Standardabweichung: 3,2249
  - Irrtumswahrscheinlichkeit: 10 %

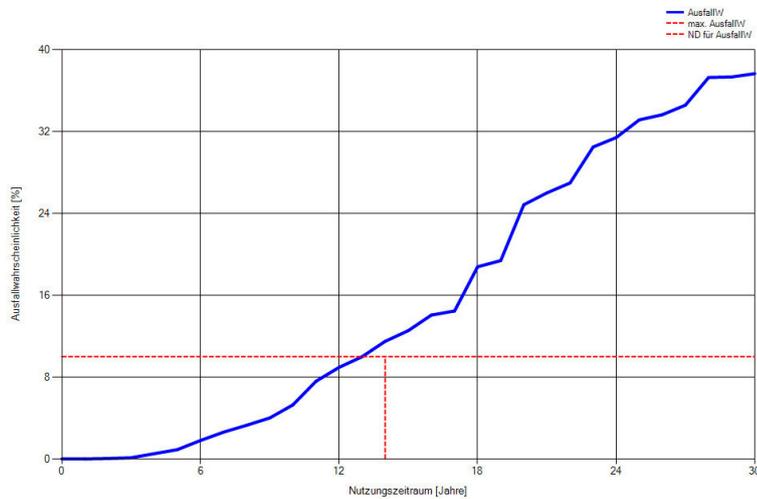
- Steifigkeitsmoduln der Asphaltmaterialien:  
Für die Berücksichtigung der Streuung der Steifigkeitsmoduln der Asphaltmaterialien wurde die in den RSO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018) beschriebene Mindestanzahl von 3 Klassen gewählt. Die zu berücksichtigende Unterschreitungswahrscheinlichkeit beträgt somit 0,01 %. Weitere statistische Kennwerte sind:
  - Asphaltdeckschicht (ADS):  
Größe der Stichprobe: 15  
Mittelwert der x-Werte der Stichprobe: 2,064 064  
Summe der Differenzenquadrate (Stichprobe und Mittelwert): 52,115 294  
Standardabweichung: 0,106 001
  - Asphaltbinderschicht (ABS):  
Größe der Stichprobe: 15  
Mittelwert der x-Werte der Stichprobe: 2,064 064  
Summe der Differenzenquadrate (Stichprobe und Mittelwert): 52,115 294  
Standardabweichung: 0,105 976
  - Asphalttragschicht (ATS):  
Größe der Stichprobe: 15  
Mittelwert der x-Werte der Stichprobe: 2,064 064  
Summe der Differenzenquadrate (Stichprobe und Mittelwert): 52,115 294  
Standardabweichung: 0,106 018
- Ermüdungslastwechselzahlen der Asphaltmaterialien:  
Für die Berücksichtigung der Streuung der Ermüdungslastwechselzahlen der Asphaltmaterialien wurde die in den RSO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018) beschriebene Mindestanzahl von 7 Klassen gewählt. Die zu berücksichtigende Unterschreitungswahrscheinlichkeit beträgt somit 0,01 %. Weitere statistische Kennwerte sind:
  - Größe der Stichprobe: 9  
Mittelwert der x-Werte der Stichprobe: –1,000 185  
Summe der Differenzenquadrate (Stichprobe und Mittelwert): 0,380 793  
Standardabweichung: 0,128 551

Auf Grundlage der beschriebenen Modell- und Berechnungsannahmen wurden mit dem entwickelten Rechenkern basierend auf der Mehrschichtentheorie und dem Programm **ADtoPave** Berechnungen unter Anwendung der probabilistischen Verfahrensweise durchgeführt und die prognostizierten Ausfallwahrscheinlichkeiten verglichen. In Tabelle 8.2 sind die berechneten Ausfallwahrscheinlichkeiten jahresweise zusammengefasst. Eine grafische Darstellung der Berechnungsergebnisse für beide Verifikationsmodelle wird in Bild 8.4 und Bild 8.5 geboten.

Gemäß den den RSO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018) wurde für die betrachteten Konstruktionsaufbauten eine Ausfallwahrschein-



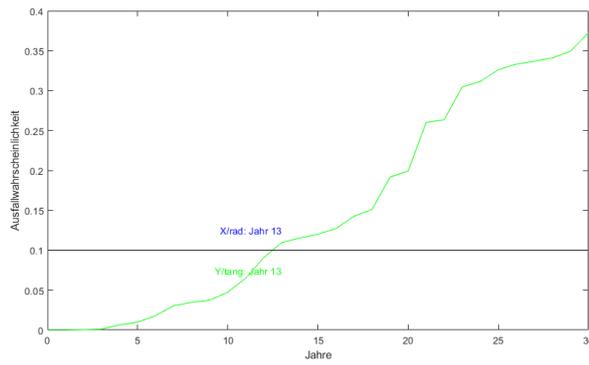
(a) Ausfallwahrscheinlichkeit flexCALC - Mehrschichtentheorie (MST).



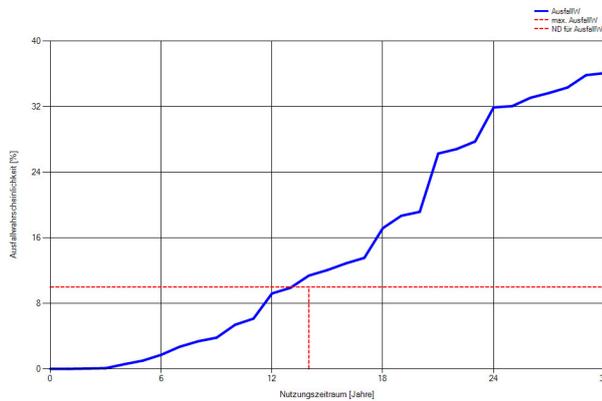
(b) Ausfallwahrscheinlichkeit ADtoPave - Mehrschichtentheorie (MST).

Bild 8.4: Vergleich der Ergebnisse der Ausfallwahrscheinlichkeiten der Verifikationsrechnung 1 zwischen flexCALC und ADtoPave gemäß den RSO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018); Darstellung für eine Grenzausfallwahrscheinlichkeit von 10 %.

lichkeit von 10 % als Grenzausfallwahrscheinlichkeit angenommen. Wird diese überschritten, so gilt die Konstruktion als ausgefallen. In Tabelle 8.2 ist deshalb ergänzend das Nutzungsjahr angegeben, in dem die maßgebende Grenzausfallwahrscheinlichkeit überschritten wird. Dieser Wert kann als Vergleichswert herangezogen werden. Die dem Jahr des Überschreitens der Grenzausfallwahrscheinlichkeit zuzuordnende Ausfallwahrscheinlichkeit ist in Tabelle 8.2 rot markiert.



(a) Ausfallwahrscheinlichkeit flexCALC - Mehrschichtentheorie (MST).



(b) Ausfallwahrscheinlichkeit ADtoPave - Mehrschichtentheorie (MST).

Bild 8.5: Vergleich der Ergebnisse der Ausfallwahrscheinlichkeiten der Verifikationsrechnung 2 zwischen flexCALC und ADtoPave gemäß den RSO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018); Darstellung für eine Grenzausfallwahrscheinlichkeit von 10 %.

Bei beiden Verifikationsmodellen wurde ein Überschreiten der Grenzausfallwahrscheinlichkeit von 10 % im 13. bzw. 14. Nutzungsjahr prognostiziert. Die sich über die Nutzungszeit ändernden Ausfallwahrscheinlichkeiten zeigen für alle Berechnungsvarianten qualitativ gleichwertige Verläufe.

Die Berechnungen mit ADtoPave führen rechnerisch zwar zu einem geringfügig späteren Erreichen der Grenzausfallwahrscheinlichkeit, betrachtet man jedoch die jahresweise aufgeführten Einzelwerte, so zeigt sich insbesondere für das Verifikationsmodell 2, dass mit beiden Berechnungsprogrammen sowohl geringfügig kleinere als auch geringfügig größere Ausfallwahrscheinlichkeiten berechnet wurden.

Die dargestellten Abweichungen können als vernachlässigbar bewertet werden und

Nutzungs- jahr	Verifikationsmodell 1		Verifikationsmodell 2	
	flexCALC MST	ADtoPave MST	flexCALC MST	ADtoPave MST
1	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,04	0,04	0,04	0,04
3	0,11	0,11	0,11	0,09
4	0,53	0,51	0,64	0,57
5	0,96	0,91	0,98	1,00
6	1,80	1,80	1,80	1,72
7	2,62	2,62	3,04	2,70
8	3,30	3,29	3,47	3,37
9	4,10	4,00	3,74	3,81
10	5,41	5,28	4,75	5,38
11	7,59	7,59	6,50	6,14
12	9,12	8,95	9,08	9,20
13	<b>11,00</b>	9,99	<b>10,97</b>	9,90
14	11,71	<b>11,50</b>	11,52	<b>11,38</b>
15	12,58	12,54	12,01	12,06
16	14,14	14,07	12,70	12,87
17	17,97	14,46	14,26	13,55
18	18,79	18,78	15,10	17,17
19	20,24	19,39	19,17	18,68
20	25,23	24,85	19,92	19,17
21	26,26	26,01	26,02	26,28
22	30,48	26,97	26,34	26,83
23	30,67	30,50	30,45	27,75
24	31,51	31,42	31,14	31,91
25	33,53	33,15	32,62	32,06
26	34,50	33,65	33,31	33,09
27	36,45	34,59	33,68	33,67
28	37,29	37,29	34,10	34,34
29	37,41	37,35	34,94	35,84
30	43,31	37,66	37,24	36,09
AusfallWSK > 10 %	Jahr 13	Jahr 14	Jahr 13	Jahr 14

Tabelle 8.2: Vergleich der Ausfallwahrscheinlichkeiten (AusfallWSK) für die Verifikationsmodelle 1 und 2 berechnet mit flexCALC und ADtoPave gemäß den RSO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018).

sind, wie schon beschrieben, insbesondere auf unterschiedliche Lösungsalgorithmen und Randbedingungen zurückzuführen, die zu geringfügig unterschiedlichen maßgebenden Dehnungen in den betrachteten Nachweispunkten führen.

Ein Vergleich der mittels deterministischem und probabilistischem Ansatz berechneten Ergebnisse ist nicht zulässig. Für die beschriebenen Vergleichsrechnungen zur Verifikation der Einbindung beider Berechnungsansätze in das entwickelte Programm **flexCALC** wurde der gleiche Anpassungsfaktor (Sicherheitsbeiwert gemäß den RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009)) verwendet. Ergänzende Ausführungen hierzu können dem nachfolgenden Abschnitt 8.2 entnommen werden. Des Weiteren gilt zu bemerken, dass die Anwendung der deterministischen Verfahrensweise keine Aussage hinsichtlich der als ausgefallen anzunehmenden Flächen bietet. Berechnete Ausfallwahrscheinlichkeiten sind im Vergleich zu berechneten Restnutzungsdauern wesentlich aussagekräftiger.

## 8.2 Kalibrierung des analytisch deterministischen Rechenkerns

In Abschnitt 8.1 wurde gezeigt, dass Berechnungen mit dem entwickelten Berechnungsprogramm `flexCALC` bei Annahme vereinfachter Modellbedingungen zu Ergebnissen führen, die den Berechnungsergebnissen bei Verwendung des Programms `ADtoPave` gleichen. Neben der Validierung des Rechenkerns basierend auf der Mehrschichten-theorie sind für eine Anwendung des Rechenkerns im Rahmen von Bemessungs- und Bewertungsaufgaben geeignete Anpassungsfaktoren bereitzustellen (vgl. Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen (2009) bzw. Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen (2021) und Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen (2018)).

Grundsätzlich gilt, dass für Standardanwendungsfälle unabhängig von der Wahl des Berechnungsprogrammes identische Anpassungsfaktoren gemäß gültigem Regelwerk zu verwenden sind. Künftig können die zu verwendenden Anpassungsfaktoren dem Arbeit-spapier „Ermittlung von Anpassungsfaktoren für die Dimensionierung und Bewertung der strukturellen Substanz von Asphalt“ entnommen werden.

Für Bemessungs- und Substanzbewertungsaufgaben sind unterschiedliche Anpassungs-faktoren zu verwenden. D. h. beiden Herangehensweisen liegen unterschiedliche Sicher-heitsbedürfnisse zugrunde. Da bei der Bewertung bestehender Befestigungen tatsäch-lich vorhandene Schichtdicken und Materialeigenschaften, sowie deren reale Streubreiten, berücksichtigt werden können, ist hier eine gesichertere Prognose der verbleibenden Nutzungsdauer möglich als es bei der Bemessung (Dimensionierung) von Neubaumaß-nahmen der Fall ist. Da hier nur mit fiktiven Kennwerten gearbeitet werden kann, ist hier ein größeres Sicherheitsniveau erforderlich. Aus dieser Überlegung erschließt sich, dass bei Anwendung des deterministischen und des probabilistischen Verfahrens unterschiedliche Anpassungsfaktoren zu verwenden sind.

Bei relativen Betrachtungen hat die Wahl der Anpassungsfaktoren keinen Einfluss auf die Berechnungsergebnisse.

Das Grundprinzip der Kalibrierung der Anpassungsfaktoren besteht derzeit darin, für einen, gemäß den RStO (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen (FGSV) 2012), standardisierten Befestigungsaufbau mit definierten Materialien in den einzelnen Schichten den Anpassungsfaktor zu ermitteln, bei dessen Anwendung eine Nutzungsdauer von 30 Jahren rechnerisch erwartet werden kann. Umfassende Informa-tion zur Kalibrierung der Anpassungsfaktoren, u. a. hinsichtlich der berücksichtigten Belastungszustände, sind in Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen (2020) zusammengefasst.

# Zusammenfassung und Ausblick

Zur Bemessung und Bewertung von flexiblen Straßenbefestigungen wurde das weitestgehend in Matlab geschriebene Programm **flexCALC** erstellt, welches die rechnerische Dimensionierung (gemäß den RDO Asphalt) und die Substanzbewertung (gemäß den RSO Asphalt) in einer Softwareplattform zusammenführt. In **flexCALC** stehen hierfür ein Fourier-unterstützter Finite-Elemente-Rechenkern (FSFEM) sowie ein Rechenkern auf Basis der Mehrschichtentheorie (MST) zur Verfügung. Während der MST-Rechenkern naturgemäß deutlich schneller ist als der FSFEM-Rechenkern, eröffnet die Verwendung der FSFEM bislang nicht vorhandene Anwendungsmöglichkeiten — so ist nun auch die Analyse von Randbelastung problemlos möglich. Die Rechengeschwindigkeit mit dem FSFEM-Rechenkern konnte im Vergleich zum Vorgängerprojekt FE 04.0259/2012/NGB gesteigert werden. Die zur Lösung benötigte Berechnungszeit für einen Beanspruchungszustand eines typischen Straßenaufbaus liegt im Bereich von wenigen Sekunden. Der Programmcode wurde hierfür komplett neu implementiert. Beide Rechenkerne verwenden derzeit linear-elastische Statik.

Nichtlineare Materialmodelle und dynamische Effekte werden aufgrund ihrer Komplexität in der Dimensionierungspraxis bislang nicht berücksichtigt, was zu großen Abweichungen gegenüber der Realität führen kann. Daher wurde außerdem ein Finite-Elemente-Rechenkern mit rein polynomialen Ansatzfunktionen implementiert, der mit materiellen Nichtlinearitäten problemlos umgehen kann. Zur Auswahl stehen verschiedene Modelle für ungebundene granulare Materialien sowie ein etabliertes Modell für viskoelastische Materialien. Zur Modellierung des Schichtenverbundes wurden verschiedene Konstitutivgesetze und die dazugehörige Elementformulierung implementiert. Außerdem ist ein expliziter Löser integriert.

Neben der rechnerischen Dimensionierung von Asphaltbefestigungen unter Verwendung des deterministischen Ansatzes beinhaltet **flexCALC** auch die probabilistische Verfahrensweise der Substanzbewertung. Um hierbei, trotz der großen Anzahl der zu berechnenden Beanspruchungszustände, ebenfalls die Fähigkeiten und Möglichkeiten des FSFEM-Rechenkerns praktikabel anwenden zu können, wurde der Berechnungsprozess optimiert. Dabei konnte durch Anwendung einer analytischen, statt der numerischen Verfahrensweise, die Anzahl der benötigten Beanspruchungszustände reduziert werden. Dadurch wird die Berechnungszeit deutlich verringert, ohne eine maßgebliche Veränderung in den Berechnungsergebnissen zu erzeugen.

In dem vorliegenden Forschungsvorhaben wurde der in dem Projekt FE 04.0259/2012/NGB identifizierte Forschungsbedarf weitestgehend umgesetzt. Damit steht nun ein modu-

lares Werkzeug bereit, welches die Weiterentwicklung der Dimensionierung und Bewertung von flexiblen Straßenkonstruktionen unterstützen wird. Weiterer Forschungsbedarf wird einerseits in der Verbesserung von Details der implementierten Algorithmen und deren Zusammenspiel, andererseits in der realitätsnahen Parametrisierung der Modelle und deren Anwendung gesehen. Darüber hinaus muss untersucht werden, ob man zukünftig den Hauptspannungs- bzw. Hauptdehnungszustand betrachtet, da sich bei komplexeren Berechnungsmodellen der maßgebliche Nachweispunkt nicht mehr zwangsläufig in der Lastachse befindet. Die sich dabei ergebenden zustandsabhängigen Richtungsänderungen machen ebenfalls eine Überarbeitung des Schadenskriteriums notwendig.

**FSFEM** Im Rahmen der Verifikation gegen eine als konvergiert erachtete Lösung mittels eines polynomialen FE-Rechenkerns wurden moderate aber systematische Abweichungen festgestellt, die auf den verwendeten Ansatz zurückgeführt werden. Der in Abschnitt 2.1.4 diskutierte Ansatz auf Basis von Sinus-Reihen sollte im Zusammenhang mit der Modellierung realistischerer Reifenkontaktdruckverteilungen untersucht werden. Insbesondere die Umsetzung abklingender Verschiebungen an den Rändern des Rechengebietes kann durch den Sinus-Ansatz gewährleistet werden. Mutmaßlich werden dadurch die Abweichungen gegenüber einer polynomialen FE-Lösung und der Mehrschichtentheorie minimiert.

Die Implementierung der Extrapolation der Spannungen an den Integrationspunkten auf Knotenwerte sollte die benötigte Netzdichte drastisch reduzieren und damit die Rechengeschwindigkeit weiter erhöhen.

Die Erweiterung des FSFEM-Rechenkerns zur Berücksichtigung von Nichtlinearitäten sollte analysiert werden (siehe Diskussion in Abschnitt 1.2).

**Dynamik und Viskoelastizität** Die Modellierung der Dynamik Abschnitt 2.2 ist nur zusammen mit einer detailgetreuen Charakterisierung der viskoelastischen Eigenschaften Abschnitt 2.3 zielführend. Die Verwendung der Rayleigh-Dämpfung ist zur Abbildung komplexer Spektren nicht geeignet. Hier ist insbesondere auf die Verwendung anwendungsspezifischer Relaxationsspektren zu achten. Auch der Aspekt der Schlechtgestelltheit des Problems der Parameteridentifikation bei Verwendung vieler Maxwell-Arme im generalisierten Maxwell-Modell ist zu behandeln. Nach Lösung dieser Detailprobleme ist eine Rückrechnung aus Deflektionsmulden — wie sie beispielsweise das TSD aufzeichnet — wahrscheinlich möglich.

Die Korrektgestelltheit des Problems der Rückrechnung ist generell zu untersuchen.

**Tragschichten ohne Bindemittel** Das nichtlineare Verhalten granularer Straßenbaustoffe kann bei Betrachtung von flexiblen Straßenkonstruktionen gemäß den RStO vernachlässigt werden. Besteht jedoch der Wunsch, vom derzeit gültigen Regelwerk abwei-

chende Befestigungen rechnerisch zu analysieren, so muss das nichtlineare Verhalten granularer Straßenbaustoffe unbedingt berücksichtigt werden. Voraussetzung hierfür ist jedoch, dass das mechanische Verhalten der granularen Straßenbaustoffe möglichst realitätsnah durch geeignete nichtlineare Stoffmodelle beschrieben wird. Diesbezüglich sind weitere Untersuchungen unbedingt erforderlich. Die Verwendung nichtlinearer Materialmodelle bedingt eine deutliche Erhöhung des erforderlichen Rechenaufwandes zur Analyse verschiedener Beanspruchungszustände. Nichtlineares Materialverhalten sollte daher nur bei gegebener Notwendigkeit berücksichtigt werden.

**Schichtenverbund** Das implementierte Modell für den Schichtenverbund (PPR, siehe Abschnitt 2.5.2) sollte zusammen mit dem dynamischen Versuch zum Schichtenverbund „Zyklische Schersteifigkeits- und Scherermüdungsprüfung zur Bewertung und Optimierung des Schichtenverbundes in Straßenbefestigungen aus Asphalt“ (Wellner und Wistuba 2016) angewendet werden. Hierzu müssen die Kinematik des Verschiebungssprungs und das Konstitutivgesetz auf 3D erweitert werden. Die Verwendung eines einfacheren (bspw. bilinearen) Konstitutivgesetzes ist ebenfalls zu überprüfen.

Die Einflüsse der Verwendung eines in Abschnitt 2.5.4 beschriebenen linearen Konstitutivgesetzes gegenüber einer realistischeren nichtlinearen Tangente (etwa PPR) können relativ einfach mit einer polynomialen FEM analysiert werden.

# Literatur

- [1] A. Alipour und T. Scarpas. „Finite Element Simulation of the Response of No-Tension Materials“. In: *Proceedings of the TMS Middle East - Mediterranean Materials Congress on Energy and Infrastructure Systems (MEMA 2015)*. Hrsg. von I. Karaman, R. Arróyave und E. Masad. 2015, S. 25–34. DOI: 10.1007/978-3-319-48766-3\_3.
- [2] G. Amdahl. „Validity of the Single Processor Approach to Achieving Large-Scale Computing Capabilities“. In: *AFIPS Conference Proceedings*. Bd. 30. 1967, S. 483–485. DOI: 10.1145/1465482.1465560.
- [3] F. T. S. Aragão u. a. „Micromechanical Model for Heterogeneous Asphalt Concrete Mixtures Subjected to Fracture Failure“. In: *Journal of Materials in Civil Engineering, SPECIAL ISSUE: Multiscale and Micromechanical Modeling of Asphalt Mixes 23* (2011), S. 30–38. DOI: 10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0000004.
- [4] G. I. Barenblatt. „The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture“. In: *Advances in Applied Mechanics 7* (1962), S. 55–129. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70121-2.
- [5] K.-J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. 2. Aufl. Springer, 2002, S. 1253. ISBN: 978-3642304156.
- [6] Z. P. Bažant. „Concrete fracture models: testing and practice“. In: *Engineering Fracture Mechanics 69.2* (Jan. 2002), S. 165–205. DOI: 10.1016/S0013-7944(01)00084-4.
- [7] N. D. Beskou und D. D. Theodorakopoulos. „Dynamic effects of moving loads on road pavements: A review“. In: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering 31.4* (2011), S. 547–567. DOI: 10.1016/j.soildyn.2010.11.002.
- [8] R. Blab und J. T. Harvey. „Modeling Measured 3D Tire Contact Stresses in a Viscoelastic FE Pavement Model“. In: *International Journal of Geomechanics 2* (2002), S. 271–290. DOI: 10.1080/15323640208500186.
- [9] D. Bodin u. a. „APADS: finite method software for enhanced pavement analysis including nonlinear behavior of granular materials“. In: *26th AARRB Conference, Sydney, New South Wales, Australia*. 2014.
- [10] A. F. Bower. *Applied Mechanics of Solids*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. ISBN: 978-1439802472.

- [11] H. R. Boyce. „A non-linear model for the elastic behavior of granular materials under repeated loading“. In: *Proceedings of the International Symposium on Soils Under Cyclic and Transient Loading*. 1980, S. 169–177.
- [12] G. T. Camacho und M. Ortiz. „Computational modelling of impact damage in brittle materials“. In: *International Journal of Solids and Structures* 33.20–22 (Aug. 1996), S. 2899–2938. DOI: 10.1016/0020-7683(95)00255-3.
- [13] A. Chabot, P. Tamagny u. a. „Visco-elastic modeling for asphalt pavements — software ViscoRoute“. In: *Proceedings of the 10th International Conference on Asphalt Pavements, Québec*. 2006, S. 5–14.
- [14] A. Chabot, O. Chupin u. a. „Viscoroute 2.0: a tool for the simulation of moving load effects on asphalt pavement“. In: *Road Materials and Pavements Design* 11 (2 2010), S. 227–250. DOI: 10.1080/14680629.2010.9690274.
- [15] J. Chen, H. Wang, H. Dan u. a. „Random Modeling of Three-dimensional Heterogeneous Microstructure of Asphalt Concrete for Mechanical Analysis“. In: *Journal of Engineering Mechanics* 144.9 (Sep. 2018), S. 04018083. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001505.
- [16] J. Chen, H. Wang und L. Li. „Virtual testing of asphalt mixture with two-dimensional and three-dimensional random aggregate structures“. In: *International Journal of Pavement Engineering* 18 (9: Perspectives on Multiscale, Multiphase, and Multiphysics Issues in Bituminous Materials and Pavements 2015), S. 824–836. DOI: 10.1080/10298436.2015.1066005.
- [17] Y. K. Cheung. „The Finite Strip Method in the Analys of Elastic Plates with Two Opposite Simply Supported Ends“. In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 40 (1 1968), S. 1–7. DOI: 10.1680/iicep.1968.7709.
- [18] Y. K. Cheung. *Finite Strip Method in Structural Analysis*. 1. Aufl. Oxford New York: Pergamon Press, 1976. ISBN: 0080183085.
- [19] O. Chupin u. a. „Influence of sliding interfaces on the response of a layered viscoelastic medium under a moving load“. In: *International Journal of Solids and Structures* 47.25-26 (Dez. 2010), S. 3435–3446. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.08.020.
- [20] E. Coleri u. a. „Development of a micromechanical finite element model from computed tomography images for shear modulus simulation of asphalt mixtures“. In: *Construction and Building Materials* 30 (2012), S. 783–793. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2011.12.071.
- [21] T. Czarnecki. „Computergestützte numerische Modellierungdes Generalisierten Maxwellmodells“. Qualifikationsschr. RWTH Aachen University, Institute of Applied Mechanics, 10. Okt. 2017.
- [22] W. Dahmen und A. Reusken. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-76493-9.

- [23] J. R. de Almeida. „Development and validation of a finite element code for pavement analysis“. In: *FLEXIBLE PAVEMENTS. PROCEEDINGS OF THE EUROPEAN SYMPOSIUM EUROFLEX*. 1993, S. 175–183. ISBN: 90-5410-523-2.
- [24] M. de Beer und C. Fisher. *Contact stresses of pneumatic tires measured with the Vehicle-Road Surface Pressure Transducer Array (VRSPTA) system for the University of California at Berkeley (UCB) and the Nevada Automotive Test Center (NATC): Volume 1*. Techn. Ber. Division of Roads und Transport Technology, CSIR, P 0 Box 395, Pretoria, 0001, South Africa, 1997.
- [25] F. V. de Souza u. a. „Model for Predicting Damage Evolution in Heterogeneous Viscoelastic Asphaltic Mixtures“. In: *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 1891 (2004), S. 131–139. DOI: 10.3141/1891-16.
- [26] D. S. Dugdale. „Yielding of steel sheets containing slits“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8 (2 1960), S. 100–104. DOI: 10.1016/0022-5096(60)90013-2.
- [27] M. Eslaminia und M. N. Guddati. „Fourier-finite element analysis of pavements under moving vehicular loading“. In: *International Journal of Pavement Engineering* 17 (7 2016), S. 602–614. DOI: 10.1080/10298436.2015.1007237.
- [28] C. of the European Communities. *ADVANCED MODELS FOR ANALYTICAL DESIGN OF EUROPEAN PAVEMENT STRUCTURES — AMADEUS*. Final Report. 29. März 2000, S. 187.
- [29] Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen. *Richtlinien für die rechnerische Dimensionierung des Oberbaus von Verkehrsflächen mit Asphaltdecke (RDO Asphalt 09) - Fassung 2021*. Entwurfsfassung - Stand September 2020. 2021.
- [30] Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen. *Richtlinien für die rechnerische Dimensionierung des Oberbaus von Verkehrsflächen mit Asphaltdecke (RDO Asphalt)*. 2009.
- [31] Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen. *Richtlinien zur Bewertung der strukturellen Substanz des Oberbaus von Verkehrsflächen in Asphaltbauweise (RSO Asphalt)*. Entwurfsfassung. 2018.
- [32] A. " Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen (FGSV). *Richtlinien für die Standardisierung des Oberbaus von Verkehrsflächen RStO*. 2012.
- [33] A. I. Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen (FGSV). *Arbeitspapiere zur Dimensionierung von Verkehrsflächenbefestigungen, Reihe B: Berechnungsmodelle, Teil B 4: Schichtenverbund bei der Dimensionierung von Asphaltbefestigungen*. 2011.
- [34] A. I. Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen. *Arbeitspapier Ermittlung von Anpassungsfaktoren für die Dimensionierung und Bewertung der strukturellen Substanz von Asphalt (Entwurfsfassung)*. FGSV Verlag, 2020.

- [35] L. Frýba. „Dynamic Interaction of Vehicles with Tracks and Roads“. In: *Vehicle System Dynamics* 16.3 (Jan. 1987), S. 129–138. DOI: 10.1080/00423118708968874.
- [36] D. F. Golla und P. C. Hughes. „Dynamics of Viscoelastic Structures—A Time-Domain, Finite Element Formulation“. In: *Journal of Applied Mechanics* 52.4 (1985), S. 897. DOI: 10.1115/1.3169166.
- [37] P. E. Grafton und D. R. Strome. „Analysis of Axisymmetrical Shells by the Direct Stiffness Method“. In: *AIAA Journal* 1.10 (Okt. 1963), S. 2342–2347. DOI: 10.2514/3.2064.
- [38] R. S. Harichandran, M.-s. Yeh und G. Y. Baladi. „MICH-PAVE: A Nonlinear Finite Element Program for Analysis of Flexible Pavements“. In: *Transportation Research Record* 1286 (1990), S. 123–131.
- [39] R. G. Hicks und C. L. Monismith. „Factors Influencing the Resilient Response of Granular Materials“. In: *Highway Research Record* (345 1971), S. 15–31.
- [40] A. Hillerborg, M. Modéer und P.-E. Petersson. „Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements“. In: *Cement and Concrete Research* 6.6 (Nov. 1976), S. 773–781. DOI: 10.1016/0008-8846(76)90007-7.
- [41] P. Hopman. „VEROAD: A Viscoelastic Multilayer Computer Program“. In: *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 1539 (1996), S. 72–80. ISSN: 0361-1981. DOI: 10.3141/1539-10.
- [42] S. Hu, X. Hu und F. Zhou. „Using semi-analytical finite element method to evaluate stress intensity factors in pavement structure“. In: *6th RILEM International Conference on Cracking in Pavements*. 2008, S. 637–646.
- [43] Y. H. Huang. *Pavement Analysis and Design*. 2. Aufl. Pearson Prentice Hall, 2004.
- [44] C. Huet. „Etude par une methods d’impédance du comportement viscoelastique des materiaux hydrocarbonnés“. In: *Annales des Ponts et Chaussées* 6 (1965), S. 373–429.
- [45] IDAV GmbH. *ADtoPave - Analysing and Design Tool for Pavements*. 2020.
- [46] Internet Engineering Task Force (IETF). *The JavaScript Object Notation (JSON) Data Interchange Format*. Hrsg. von T. Bray. Dez. 2017. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc8259>.
- [47] G. R. Irwin. „Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate“. In: *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957), S. 361–364.
- [48] F. J. Jooste. „Flexible Pavement Response Evaluation using the Semi-analytical Finite Element Method“. In: *Road Materials and Pavement Design* 3 (2 2002). DOI: 10.1080/14680629.2002.9689923.

- [49] M. Kaliske und H. Rothert. „Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains“. In: *Computational Mechanics* 19 (1997), S. 228–239. DOI: 10.1007/s004660050171.
- [50] M. Karahasin, A. R. Dawson und J. T. Holden. „Applicability of Resilient Constitutive Models of Granular Material for Unbound Base Layers“. In: *Transportation Research Record* 1406 (1993), S. 98–107.
- [51] S. Kayser. „Grundlagen zur Erfassung klimatischer Einflüsse für Dimensionierungsrechnungen von Asphaltbefestigungen“. Diss. TU Dresden, 2007.
- [52] H. Kim und W. G. Buttlar. „Discrete fracture modeling of asphalt concrete“. In: *International Journal of Solids and Structures* 46 (2009), S. 2593–2604. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2009.02.006.
- [53] H. Kim und W. G. Buttlar. „Multi-scale fracture modeling of asphalt composite structures“. In: *Composites Science and Technology* 69 (2009), S. 2716–2723. DOI: 10.1016/j.compscitech.2009.08.014.
- [54] Y.-R. Kim, D. H. Allen und D. N. Little. „Damage-Induced Modeling of Asphalt Mixtures through Computational Micromechanics and Cohesive Zone Fracture“. In: *Journal of Materials in Civil Engineering* 17 (2005). DOI: 10.1061/(ASCE)0899-1561(2005)17:5(477).
- [55] P. V. Lade und R. B. Nelson. „Modelling the elastic behaviour of granular materials“. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 11 (1987), S. 521–542. DOI: 10.1002/nag.1610110507.
- [56] R. Leutner. „Untersuchung Des Schichtenverbundes Beim bituminösen Oberbau“. In: *Bitumen* 41 (3 1979), S. 84–91.
- [57] P. Liu, J. Hu u. a. „Modelling and evaluation of aggregate morphology on asphalt compression behavior“. In: *Construction and Building Materials* 133 (2017), S. 196–208. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2016.12.041.
- [58] P. Liu, D. Wang u. a. „SAFEM — Software with Graphical User Interface for fast and accurate finite element analysis of asphalt pavements“. In: *Journal of Testing and Evaluation* 45 (2017). DOI: 10.1520/JTE20150456.
- [59] P. Liu, Q. Xing, Y. Dong u. a. „Application of Finite Layer Method in Pavement Structural Analysis“. In: *Applied Sciences* 7.6 (2017). DOI: 10.3390/app7060611.
- [60] P. Liu, Q. Xing, D. Wang u. a. „Application of Dynamic Analysis in Semi-Analytical Finite Element Method“. In: *Materials* 10.9 (Aug. 2017), S. 1–13. DOI: 10.3390/ma10091010.
- [61] B. Loret. „On the choice of elastic parameters for sand“. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 9 (3 1985), S. 285–292. DOI: 10.1002/nag.1610090308.
- [62] K. Meyberg und P. Vachenauer. *Höhere Mathematik 2*. Springer-Verlag GmbH, 1. Sep. 2001. ISBN: 3-540-41851-2.

- [63] M. A. Miner. „Cumulative Fatigue Damage, fatigue; ermuedung; ermüdung“. In: *Journal of Applied Mechanics* 12 (1945), S. 159–164.
- [64] L. Mo u. a. „2D and 3D meso-scale finite element models for ravelling analysis of porous asphalt concrete“. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 44 (2008), S. 186–196. DOI: 10.1016/j.finel.2007.11.012.
- [65] L. Mo u. a. „Investigation into stress states in porous asphalt concrete on the basis of FE-modelling“. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 43 (2007), S. 333–343. DOI: 10.1016/j.finel.2006.11.004.
- [66] N. Moës, J. Dolbow und T. Belytschko. „A finite element method for crack growth without remeshing“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46.1 (Sep. 1999), S. 131–150. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J.
- [67] A. Needleman. „A Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding“. In: *Journal of Applied Mechanics* 54.3 (1987), S. 525. DOI: 10.1115/1.3173064.
- [68] A. Needleman. „An analysis of decohesion along an imperfect interface“. In: *International Journal of Fracture* 42.1 (Jan. 1990), S. 21–40. DOI: 10.1007/BF00018611.
- [69] J. Neumann, J.-W. Simon, K. Mollenhauer u. a. „A framework for 3D synthetic mesoscale models of hot mix asphalt for the finite element method“. In: *Construction and Building Materials* 148 (2017), S. 857–873. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2017.04.033.
- [70] J. Neumann, J.-W. Simon und S. Reese. „Meso- to Macroscale Homogenisation of Hot Mix Asphalt Considering Viscoelasticity and the Critical Role of Mortar“. In: *RILEM 252-CMB Symposium. Chemo Mechanical Characterization of Bituminous Materials*. Hrsg. von L. D. P. et al. Bd. 20. RILEM Bookseries. 2019. DOI: 10.1007/978-3-030-00476-7\_45.
- [71] V.-H. Nguyen, D. Duhamel und B. Nedjar. „A continuum model for granular materials taking into account the no-tension effect“. In: *Mechanics of Materials* 35 (2003), S. 955–967. DOI: 10.1016/s0167-6636(02)00326-5.
- [72] R. Numrich. „Modellierung des nichtlinear-elastischen Verformungsverhaltens von Tragschichten ohne Bindemittel (Modelling of the non-linear elastic deformation behaviour of unbound granular materials)“. Diss. TU Dresden, 2003.
- [73] M. Oeser. *Nichtlineare numerische Simulationsmodelle für Verkehrswegebefestigungen: Unter Berücksichtigung von mechanischen, thermischen und hydraulischen Einwirkungen*. Bd. 18. Technische Universität Dresden: Institut f. Leichtbau u. Fertigungstechnik Univiversität Dresden, Institut für Stadtbauwesen und Straßenbau, 2010, S. 390.
- [74] M. Oeser und T. Pellinen. „Computational framework for common visco-elastic models in engineering based on the theory of rheology“. In: *Computers and Geotechnics* 42 (2012), S. 145–156. DOI: 10.1016/j.compgeo.2012.01.003.

- [75] M. Oeser, D. Wang, P. Liu, F. Wellner u. a. *Verbesserung der Sicherheit und Wirtschaftlichkeit der rechnerische Dimensionierung von Asphaltbefestigungen über ein Finite Elemente Modell. Forschungsprojekt FE 04.0259/2012/NGB im Auftrag des Bundesministeriums für Verkehr, Bau und Stadtentwicklung vertreten durch die Bundesanstalt für Straßenwesen.* Forschungsber. RWTH Aachen, TU Dresden, 2015.
- [76] M. Oeser, D. Wang, P. Liu, M. Wistuba u. a. *Numerische Simulation der Rissausbreitung in flexiblen Asphaltbefestigungen Infolge von Verkehrslasten.* Forschungsber. RWTH Aachen, Tu Braunschweig, TU Dresden, 2015.
- [77] M. Oeser, D. Wang, F. Otto u. a. *In-Motion – Messung der strukturellen Substanz von Asphaltbefestigungen mit zerstörungsfreien Methoden.* Forschungsber. RWTH Aachen University, 2016.
- [78] M. Olsson. „On the fundamental moving load problem“. In: *Journal of Sound and Vibration* 145.2 (1991), S. 299–307. DOI: 10.1016/0022-460X(91)90593-9.
- [79] E. Oñate. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics.* Bd. 1. 2009. ISBN: 978-1-4020-8732-5.
- [80] H. Ouyang. „Moving-load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview)“. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 25.6 (Aug. 2011), S. 2039–2060. DOI: 10.1016/j.ymssp.2010.12.010.
- [81] H. Ozer u. a. „Computational micromechanical analysis of the representative volume element of bituminous composite materials“. In: *Mechanics of Time-Dependent Materials* 20 (3 2016), S. 441–453. DOI: 10.1007/s11043-016-9296-x.
- [82] K. Park und G. H. Paulino. „Cohesive Zone Models: A Critical Review of Traction-Separation Relationships Across Fracture Surfaces“. In: *Applied Mechanics Reviews* 64.6 (Feb. 2013), S. 060802-1–20. DOI: 10.1115/1.4023110.
- [83] K. Park und G. H. Paulino. „Computational implementation of the PPR potential-based cohesive model in ABAQUS: Educational perspective“. In: *Engineering Fracture Mechanics* 93 (Okt. 2012), S. 239–262. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2012.02.007.
- [84] K. Park, G. H. Paulino und J. R. Roesler. „A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 57.6 (Juni 2009), S. 891–908. DOI: 10.1016/j.jmps.2008.10.003.
- [85] D. M. Potts und L. Zdravkovic. *Finite element analysis in geotechnical engineering: Volume One — Theory.* Thomas Telford, 1999. ISBN: 0727727532.
- [86] A. C. Pronk. „The Huet-Sayegh Model: A Simple and Excellent Rheological Model for Master Curves of Asphaltic Mixes“. In: *Asphalt Concrete: Simulation, Modeling, and Experimental Characterization.* Hrsg. von E. Masad, V. P. Panoskaltis und L. Wang. 2005. DOI: 10.1061/40825(185)8.

- [87] U. Queck. „Grundlagen zur Berechnung der Spannungs-Verformungszustände ungebundener Konstruktionsschichten als Teil flexibler Befestigungen im Straßenbau“. Diss. TU Dresden, 1992.
- [88] G. Sayegh. „Contribution à l'étude des propriétés viscoélastiques des bitumes purs et des bétons bitumeux“. Diss. Université de Paris, Faculté des Sciences, 1965.
- [89] I. Scheider und W. Brocks. „Simulation of cup–cone fracture using the cohesive model“. In: *Engineering Fracture Mechanics* 70.14 (Sep. 2003), S. 1943–1961. DOI: 10.1016/S0013-7944(03)00133-4.
- [90] A. Schmidt und L. Gaul. „Finite Element Formulation of Viscoelastic Constitutive Equations Using Fractional Time Derivatives“. In: *Nonlinear Dynamics* 29.1/4 (2002), S. 37–55. DOI: 10.1023/A:1016552503411.
- [91] T. Schüler, R. Jänicke und H. Steeb. „Nonlinear modeling and computational homogenization of asphalt concrete on the basis of XRCT scans“. In: *Construction and Building Materials* 109 (2016), S. 96–108. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2016.02.012.
- [92] K.-H. Schwalbe, I. Scheider und A. Cornec. *Guidelines for Applying Cohesive Models to the Damage Behaviour of Engineering Materials and Structures*. Springer-Verlag GmbH, 2013. ISBN: 978-3-642-29494-5. DOI: 10.1007/978-3-642-29494-5..
- [93] G. D. Seidel. „A model for predicting the evolution of damage in the plastic bonded explosive LX17“. Magisterarb. Texas A&M University, 2002.
- [94] R. V. Siddharthan, J. Yao und P. E. Sebaaly. „Pavement Strain from Moving Dynamic 3D Load Distribution“. In: *Journal of Transportation Engineering* 124.6 (6 1998), S. 557–566. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-947X(1998)124:6(557).
- [95] *Standard ECMA 404: The JSON Data Interchange Syntax. 2nd edition*. ECMA International, Dez. 2017.
- [96] D. Stolle, P. Guo und Y. Liu. „Resilient modulus properties of granular highway materials“. In: *Canadian Journal of Civil Engineering* 36.4 (2009), S. 639–654. DOI: 10.1139/L08-141.
- [97] J. A. Stricklin u. a. *Linear and Nonlinear Analysis of Shells of Revolution with Asymmetrical Stiffness Properties*. Techn. Ber. Texas A&M University, College Station, Texas und NASA Manned Spacecraft Center, Houston, Texas, 1968.
- [98] E. Taciroglu und K. D. Hjelmstad. „Simple Nonlinear Model for Elastic Response of Cohesionless Granular Materials“. In: *Journal of Engineering Mechanics* 128 (9 2002), S. 969–978. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(2002)128:9(969).
- [99] A. Turon. „Simulation of delamination in composites under quasi-static and fatigue loading using cohesive zone models“. Diss. Universitat de Girona, Spain, 2006.

- [100] V. Tvergaard. „Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal“. In: *Materials Science and Engineering: A* 125.2 (Juni 1990), S. 203–213. DOI: 10.1016/0921-5093(90)90170-8.
- [101] V. Tvergaard und J. W. Hutchinson. „The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40.6 (Aug. 1992), S. 1377–1397. DOI: 10.1016/0022-5096(92)90020-3.
- [102] J. Uzan. „Characterization of Granular Material“. In: *Transportation Research Record* (1022 1985), S. 52–59.
- [103] J. Uzan. „Resilient characterization of pavement materials“. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 16 (6 1992), S. 453–459. DOI: 10.1002/nag.1610160605.
- [104] H. Wang, J. Wang und J. Chen. „Micromechanical Analysis of Asphalt Mixture Fracture with Adhesive and Cohesive Failure“. In: *Engineering Fracture Mechanics* In Press, Accepted Manuscript (2014). DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.10.029.
- [105] D. Wegener u. a. *Bestimmung statischer und dynamischer Achslasten von Nutzfahrzeugen unter Berücksichtigung innovativer Fahrzeugkonzepte und Fahrwerkstechnologien zur Minderung statischer und dynamischer Radlasten. FE 04.0253/2011/ERB*. Forschungsber. Institut für Kraftfahrzeuge, RWTH Aachen University, 2016. 146 S.
- [106] F. Wellner. „Grundlagen zur Bemessung flexibler Straßenkonstruktionen mit Tragschichten ohne Bindemittel“. Habilitation. TU Dresden, 1993.
- [107] F. Wellner und D. Ascher. *Untersuchungen zur Wirksamkeit des Haftverbundes und dessen Auswirkungen auf die Lebensdauer von Asphaltbefestigungen*. Techn. Ber. TU Dresden, Institut für Stadtbauwesen und Verkehr, 2007.
- [108] F. Wellner und B. Hristov. „Numerically Supported Experimental Determination of the Behavior of the Interlayer Bond in Asphalt Pavement“. In: *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* (2015). DOI: 10.3141/2506-13.
- [109] F. Wellner, S. Kayser u. a. *Erarbeitung probabilistischer Verfahrensweisen für die rechnerische Dimensionierung von Fahrbahnbefestigungen mit Asphaltdecken*. 2013. ISBN: 978-3-95606-013-7.
- [110] F. Wellner und M. Wistuba. *Zyklische Schersteifigkeits- und Scherermüdungsprüfung zur Bewertung und Optimierung des Schichtenverbundes in Straßenbefestigungen aus Asphalt*. Forschungsber. TU Dresden, TU Braunschweig, 2016. 326 S.
- [111] J. Wimmer, J. Schnepf und S. Reese. „Modelling and Simulation of Asphalt“. In: *Special Issue: 85th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM), Erlangen*. Hrsg. von P. Steinmann und G. Leugering. 2014, S. 249–250. DOI: 10.1002/pamm.201410112.

- [112] M. Woldekidan, M. Huurman und A. Pronk. „A modified HS model: Numerical applications in modeling the response of bituminous materials“. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 53 (2012), S. 37–47. DOI: 10.1016/j.finel.2012.01.003.
- [113] A. R. Woodside, J. Wilson und G. X. Liu. „The Distribution of Stresses at the Interface between Tyre and Road and Their Effect on Surface Chippings“. In: *International Conference on Asphalt Pavements, 7th, 1992, Nottingham, United Kingdom*. Bd. 3. 1992.
- [114] P. Wriggers. *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-71000-4.
- [115] Q. Xu und M. Solaimanian. „Modelling linear viscoelastic properties of asphalt concrete by the Huet-Sayegh model“. In: *International Journal of Pavement Engineering* 10.6 (Dez. 2009), S. 401–422. DOI: 10.1080/10298430802524784.
- [116] X.-P. Xu und A. Needleman. „Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids“. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42.9 (Sep. 1994), S. 1397–1434. DOI: 10.1016/0022-5096(94)90003-5.
- [117] C. Yoon und D. H. Allen. „Damage Dependent Constitutive Behavior and Energy Release Rate for a Cohesive Zone in a Thermoviscoelastic Solid“. In: *International Journal of Fracture* 96.1 (1999), S. 55–74. DOI: 10.1023/A:1018601004565.
- [118] O. C. Zienkiewicz. *Methode der finiten Elemente*. Carl Hanser Verlag München Wien, 1975. ISBN: 3-446-12046-7.
- [119] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor und J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 7. Aufl. Butterworth-Heinemann, 2013, S. 756. ISBN: 978-1856176330.

# Bilder

- 2.1 Strukturen von Steifigkeitsmatrizen mit FEM (links) und mit **FSFEM** (rechts) Ansatz
- 2.2 Erste 4 harmonische Teilschwingungen von Sinus (oben) und Cosinus (unten)
- 2.3 Beispiel für zwei Rechtecklasten unterschiedlicher Länge und Amplitude, die mit unterschiedlichen Anzahlen an Fouriertermen approximiert werden
- 2.4 Flussdiagramme von klassischen und Fourier-Unterstützten FE-Codes
- 2.5 Geometrie und Randbedingungen des Verifizierungsproblems
- 2.6 Ursprungs- (schwarz) und deformierte (magenta) Konfiguration des Verifizierungsproblems ebene Dehnung für 4 lineare Quadrilaterale
- 2.7 Ansichten äquidistanter Schnitte in der x-y-Ebene des Verifikationsproblems. Die Deformation ist 10fach überhöht dargestellt
- 2.8 Relativer Fehler der Verschiebung von Knoten 7
- 2.9 Darstellung des vereinfachten Straßenaufbaus
- 2.10 Darstellung der Verschiebungen entlang des Pfades
- 2.11 Darstellung der Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\sigma_z$  entlang des Pfades
- 2.13 Vergleich der Verschiebungen zwischen 3D FEM und **FSFEM**. Für beide Netze gilt  $cl = 3$ , d.h. dass das 3D Netz wieder dem zuvor verwendeten entspricht
- 2.14 Vergleich der Spannungen zwischen 3D FEM und **FSFEM**. Für beide Netze gilt  $cl = 3$ , d.h. dass das 3D Netz wieder dem zuvor verwendeten entspricht
- 2.15 Konvergenzstudie **FSFEM** für das einschichtige Modell mit  $E = 1000$  MPa. Die Graphen verwenden  $420 \leq n_{FT} \leq 461$
- 2.16 Netz, Pfade und Spannungen im zweischichtigen Viertelmodell. Alle Spannungen in MPa
- 2.17 Verschiebungen und Spannungen an der Oberseite der Decke im zweischichtigen Modell
- 2.18 Übersicht über Verschiebungen und Spannungen an der Unterseite der Decke bei einer Steifigkeit der Decke von  $E = 10\,000$  MPa
- 2.19 Konvergenzstudie bezüglich  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  mittels **FSFEM** für die Unterseite der Decke. Die Graphen verwenden  $20 \leq n_{FT} \leq 40$
- 2.20 3D Tetraedernetz in Abaqus und Dreiecksnetz in GMSH
- 2.21 Absolute und relative Berechnungszeit in Abhängigkeit der Anzahl der Belastungszustände bei acht Rechenkernen. Quelle: Oeser, Wang, Liu, Wellner u. a. 2015, Bild 103

- 2.22 Reduzierung der Laufzeiten von verschiedenen FSFEM Varianten für das Testproblem mit 876150 Unbekannten in Abhängigkeit der Anzahl der verwendeten Threads
- 2.23 Darstellung des Versuchsaufbaus zu Modellierung von bewegten Lasten mittels FEM
- 2.24 Generalisiertes Maxwell-Modell: Parallelschaltung beliebig vieler Maxwellelemente mit einer optionalen Gleichgewichtsfeder. Quelle: Czarnecki (2017)
- 2.25 Diskrete Annäherung der kontinuierlichen Dehnungsfunktion. Der Dehnungssprung  $\Delta\epsilon_i$  tritt auf, wenn der Zeitpunkt  $t \geq t_i$  erreicht wird. Quelle: Czarnecki (2017)
- 2.27 Geometrie und Randbedingungen des Verifikationsproblems
- 2.28 Spannungs-Dehnungs-Kurve des Universal-Modells für das Verifikationsproblem
- 2.30 Darstellung eines bilinearen Kohäsivgesetzes unter monotoner Belastung bis zum Bruch
- 2.31 Die drei Bruchmoden nach Irwin (1957). Lizenz: Public Domain: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fracture\\_modes\\_v2.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fracture_modes_v2.svg)
- 2.32 Verschiedene Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen: **(a)** Polynomial (Needleman 1987), **(b)** Trapezoid (Tvergaard und Hutchinson 1992), **(c)** Verrundetes Trapezoid (Scheider und Brocks 2003), **(d)** Exponential (Needleman 1990), **(e)** Bilinear (intrinsisch mit linearer Erweichung) (Hillerborg u. a. 1976), **(f)** Extrinsisch mit bilinearer Erweichung (Bažant 2002). Aus Park und Paulino (2013), ergänzt um Angaben aus Schwalbe u. a. (2013)
- 2.33 Schematische Darstellung einer Kohäsivzone mit Modus I Riss
- 2.34 Zweidimensionales lineares CZE in globalen Koordinaten (links), sowie in lokalen Koordinaten (rechts)
- 2.35 Rissöffnungs-Kohäsivspannungsverläufe des PPR-Modells mit unterschiedlichen Parametersätzen
- 2.36 Experimentaldaten des Modus I Verhaltens einer Asphaltmastix bei 23 °C von Aragão u. a. (2011) und Reproduktion mit dem PPR-Modell. Die Parameter lauten  $G_n = 65 \text{ Nmm}$ ,  $\sigma_{max} = 229 \text{ N}$ ,  $\alpha = 8$ ,  $\lambda_n = 0.5$
- 2.37 Rissöffnungs-Kohäsivspannungsverläufe des PPR-Modells für die beiden Patch-Tests aus Park und Paulino (2012)
- 2.38 Lineares Spannungs-Rissöffnungs-Verhalten eines Interface-Elements mit  $k_n = 10000$  und  $k_t = 500 \frac{\text{MPa}}{\text{mm}}$
- 2.39 Darstellung des Dehnungsfeldes in Experiment und FE-Simulation auf dem Bohrkern
  
- 3.1 Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt für zwei beispielhaft ausgewählte ncTs
- 3.2 Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt unabhängig vom ncT

- 3.3 Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt für zwei beispielhaft ausgewählte ncTs – Anpassung durch Polynomfunktion 3. Grades
- 3.4 Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt für zwei beispielhaft ausgewählte ncTs – Anpassung durch Potenzfunktion
- 3.5 Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt unabhängig vom ncT
- 3.6 Zusammenhang zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt für zwei beispielhaft ausgewählte ncTs – Anpassung durch Polynomfunktion 6. Grades
- 3.7 Materialeigenschaften für die Asphalttragschichtvariante ATS1
- 3.8 Materialeigenschaften für die Asphalttragschichtvariante ATS2
- 3.9 Materialeigenschaften für die Asphalttragschichtvariante ATS3
- 3.10 Materialeigenschaften für die Asphalttragschichtvariante ATS4
- 3.11 Klassenfunktionen zur Beschreibung der Variabilität der Steifigkeitsmoduln (beispielhaft für die ATS1)
- 3.12 Dickenklassen zur Beschreibung der Variabilität der Asphaltpaketdicken
- 3.13 Beispiele für die sechs Regressionsansätze zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Temperatur und Dehnung im Nachweispunkt; links-oben = R1, links-mitte = R2, links-unten = R3, rechts-oben = R4, rechts-mitte = R5, rechts-unten = R6
- 3.14 Relative Unterschiede der Schadenssummen der Referenzvariante im Vergleich zu den Schadenssummen der sechs untersuchten Regressionsvarianten (jeweils Mittelwert der neun Konstruktionsvarianten)
- 3.15 Relative Unterschiede der Flächen unterhalb der Ganglinie der Ausfallwahrscheinlichkeit zwischen der Referenzvariante und den sechs untersuchten Regressionsvarianten
- 3.16 Korrelationskoeffizient der Ganglinien der Ausfallwahrscheinlichkeit zwischen der Referenzvariante und den sechs untersuchten Regressionsvarianten
- 3.17 Linearisierte Steifigkeitsmodul-Temperaturfunktionen (links) und zugehörige Wahrscheinlichkeiten (rechts) am Beispiel des ATS4 und der Modellierung der Steifigkeitsvariabilität durch fünf Klassen
- 3.18 Zusammenhang zwischen Steifigkeitsmodul am Nachweispunkt und zugehöriger radialer Dehnung für einen ausgewählten Temperaturzustand ( $ncT = 1$ ;  $TFO = -12,5\text{ °C}$ ) für 15 unterschiedliche Steifigkeitsklassen
- 3.19 Zusammenhang zwischen Steifigkeitsmodul am Nachweispunkt und zugehöriger radialer Dehnung für einen ausgewählten Temperaturzustand ( $ncT = 4$ ;  $TFO = 47,5\text{ °C}$ ) für 15 unterschiedliche Steifigkeitsklassen
- 3.20 Zusammenhang zwischen Asphaltpaketdicke und zugehöriger radialer Dehnung am Nachweispunkt für einen ausgewählten Temperaturzustand ( $ncT = 1$ ;  $-12,5\text{ °C}$ ) und für zwei unterschiedliche Steifigkeitsklassen

- 3.21 Zusammenhang zwischen Asphaltpaketdicke und zugehöriger radialer Dehnung am Nachweispunkt für einen ausgewählten Temperaturzustand ( $n_c T = 4$ ; TFO = 47,5 °C) und für zwei unterschiedliche Steifigkeitsklassen
- 3.22 Gegenüberstellung der numerisch und der mit Hilfe der Regressionsgleichungen analytisch berechneten Dehnungen; beispielhaft für die ATS4 und der Variante V2 gemäß Tabelle 3.5
- 3.23 Relative Unterschiede der Schadenssummen der Referenzvariante im Vergleich zu den Schadenssummen der drei untersuchten Regressionsvarianten gemäß Tabelle 3.5 (jeweils Mittelwert der 225 Materialparameter- und Konstruktionsvarianten)
- 3.24 Relative Unterschiede der Flächen unterhalb der Ganglinie der Ausfallwahrscheinlichkeit zwischen der Referenzvariante und den drei untersuchten Regressionsvarianten gemäß Tabelle 3.5
- 3.25 Korrelationskoeffizient der Ganglinien der Ausfallwahrscheinlichkeit zwischen der Referenzvariante und den drei untersuchten Regressionsvarianten gemäß Tabelle 3.5
  
- 4.1 Schematische Darstellung des Huet-Sayegh-Modells
- 4.2 Schichtenaufbau, Materialparameter und Schichtenverbund des Berechnungsmodells der Vergleichsrechnungen
- 4.3 Temperaturverlauf
- 4.4 Schichtenaufbau mit Subschichten
- 4.5 Horizontale Dehnungen [ $\frac{\mu\text{m}}{\text{m}}$ ] an der Unterseite der Asphalttragschicht bei den untersuchten Oberflächentemperaturen von 47,5 °C (oben), 22,5 °C (mittig) und –12,5 °C (unten). Die Fahrtrichtung ist nach links
- 4.6 Vergleich der horizontalen Dehnungen an der Unterseite der Asphalttragschicht der statisch linear-elastischen und dynamisch viskoelastischen Analyse bei den untersuchten Oberflächentemperaturen von 47,5 °C (links oben), 22,5 °C (rechts oben) und –12,5 °C (unten)
- 4.7 Zusammenhang zwischen deviatorischen Dehnungsanteilen in axialer Richtung  $\epsilon_{1,d}$  und deviatorischen Spannungsanteilen  $\sigma_d$  des Gesamtsystems für die ausgewählten Gesteinskorngemische Granodiorit GRA2-M-2.0 und Diabas DIA4-M-3.4
- 4.8 Radiale Dehnungen an der Unterseite der Asphalttschicht
- 4.9 Relative Abweichungen der radialen Dehnungen an der Unterseite der Asphalttschicht
- 4.10 Spanne der relativen Abweichungen der radialen Dehnungen an der Unterseite der Asphalttschicht

- 4.11 Spanne der relativen Abweichungen der radialen Dehnungen an der Unterseite der Asphalttschicht in der Lastachse bei Annahme von linear und nichtlinear elastischem Materialverhalten der ungebundenen Tragschichtmaterialien in Abhängigkeit des aufgebrachtten Reifenkontakt-druckes von 1 bis 11 Tonnen; Variation der Steifigkeit der Asphalttschicht sowie der Querdehnzahl der ungebundenen Tragschichtmaterialien in den linearen Berechnungsmodellen; Kalibrierung der linearen Systeme für eine Belastung von 0,707 MPa (entspricht schwarzer Linie); Darstellung für eine Asphalttschichtdicke von 25 cm und das Tragschichtmaterial Diabas
- 4.12 Modell der Prüfvorrichtung für die Bestimmung des Schichtenverbundes. Quelle: Wellner und Wistuba (2016, Kapitel 3, Abbildung 3.7)
- 4.13 Beispielhaftes Ergebnis einer Auswertung eines Schichtenverbundversuches
- 4.14 Beispielhafte Darstellung einer aus Gleichung 4.2 resultierenden Flächenfunktion. Quelle: Wellner und Wistuba (2016, Kapitel 4, Abbildung 4.8b)
- 4.15 Beispielhaftes Ergebnis einer Auswertung eines spannungsunabhängigen Schichtenverbundversuches
- 4.16 Beispielaufbau und Netz mit Bankett und Lasteinleitung am rechten Rand
  
- 5.1 Modularer Aufbau des Programmes
- 5.2 Schematische Darstellung der Kopplung der Ergebnisse von AP200 (Abschnitt 2), AP300 und AP400 (Abschnitt 4)
- 5.3 Anwendung der JSON-Elemente Zahl, Zeichenkette, Array und Objekt zur Konfiguration und Dateneingabe
- 5.4 Beispiele möglicher Aufbauten und Netze
  
- 6.1 Beispielhafte Benutzeroberflächen von Berechnungs- und Dimensionierungsprogrammen für Asphalt
- 6.2 Arbeitsbenutzeroberfläche von FSFEM in Microsoft Excel - beispielhaft zur Konfiguration der Lastkonfiguration in JSON (siehe Bild 5.3a)
- 6.4 Vergleich verschiedener Beanspruchungszustände aufgrund unterschiedlicher Lastpositionen; Darstellung der horizontalen Spannung. Die Breite des Straßenkörpers beträgt 6 m
- 6.5 Vergleich verschiedener Beanspruchungszustände aufgrund unterschiedlicher Lastpositionen; Darstellung der vertikalen Verschiebung. Die Breite des Straßenkörpers beträgt 6 m
  
- 8.1 Konstruktionsaufbauten der Verifikationsrechnungen zwischen flexCALC und ADtoPave

- 8.2 Vergleich der Ergebnisse des Ermüdungsstatus der Verifikationsrechnung 1 zwischen **flexCALC** und **ADtoPave** gemäß den RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009)
- 8.3 Vergleich der Ergebnisse des Ermüdungsstatus der Verifikationsrechnung 2 zwischen **flexCALC** und **ADtoPave** gemäß den RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009)
- 8.4 Vergleich der Ergebnisse der Ausfallwahrscheinlichkeiten der Verifikationsrechnung 1 zwischen **flexCALC** und **ADtoPave** gemäß den RSO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018); Darstellung für eine Grenzausfallwahrscheinlichkeit von 10 %
- 8.5 Vergleich der Ergebnisse der Ausfallwahrscheinlichkeiten der Verifikationsrechnung 2 zwischen **flexCALC** und **ADtoPave** gemäß den RSO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018); Darstellung für eine Grenzausfallwahrscheinlichkeit von 10 %

# Tabellen

- 1.1 Deterministisch-analytische Modelle
- 1.2 Deterministisch-numerische Modelle
  
- 2.1 Numerisch und analytisch bestimmte Verschiebungen des Knotens 7, sowie absoluter Fehler. Schnitt für  $z = 10$  mm und 100 Fourier-Terme
- 2.2 Parameter des Beispielproblems Vereinfachter Straßenaufbau
- 2.3 Mittelwerte und Standardabweichungen der als konvergiert erachteten Spannungen in der Lastachse für unterschiedliche Lagerungen
- 2.4 Asymptotische Werte Spannungen in der Lastachse für 3D FE und FSFEM
- 2.5 Untersuchung der Laufzeiten der Berechnungsschritte für FSFEMa
- 2.6 Untersuchung der Laufzeiten der Berechnungsschritte für FSFEMb
- 2.7 Tabellarische Darstellung der in Bild 2.22 angegebenen Daten
- 2.8 Verschiedene Parametersätze für das PPR-Modell
- 2.9 Parametersatz für das PPR-Modell zur Verifikation
  
- 3.1 Beispielhafte Bauweise
- 3.2 Randbedingungen der untersuchten Regressionsvarianten
- 3.3 Verlauf der Ausfallwahrscheinlichkeit über die Nutzungsdauer (= Ganglinie der Ausfallwahrscheinlichkeit) für die Referenzvariante -  $PD(\varepsilon_{num})$  sowie für die sechs untersuchten Regressionsvarianten -  $PD(\varepsilon_{R1})$  bis  $PD(\varepsilon_{R6})$  unter Nutzung der ATS4
- 3.4 Relative Unterschiede der Schadenssummen der Referenzvariante im Vergleich zu den Schadenssummen der sechs untersuchten Regressionsvarianten bezogen auf die neun Konstruktionsvarianten sowie unter Nutzung der ATS4
- 3.5 Regressionsvarianten
- 3.6 Jährliche Ausfallwahrscheinlichkeiten (PD) für die Referenz- und Alternativvarianten für die ATS1 (fett gedruckt sind Unterschiede der PD)
- 3.7 Jährliche Ausfallwahrscheinlichkeiten (PD) für die Referenz- und Alternativvarianten für die ATS2 (fett gedruckt sind Unterschiede der PD)
- 3.8 Jährliche Ausfallwahrscheinlichkeiten (PD) für die Referenz- und Alternativvarianten für die ATS3 (fett gedruckt sind Unterschiede der PD)
- 3.9 Jährliche Ausfallwahrscheinlichkeiten (PD) für die Referenz- und Alternativvarianten für die ATS4 (fett gedruckt sind Unterschiede der PD)
- 3.10 Relativer Unterschied der Schadenssummen zwischen der Referenz- und den Alternativvarianten

- 4.1 Materialparameter
- 4.2 Dauer der Berechnungszeiten der verschiedenen Validierungsmodelle im Vergleich zur numerischen Anwendung gemäß den RDO Asphalt 09 (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009)
- 4.3 Parametersätze für das Dresdner Stoffmodell zur Beschreibung spannungsabhängigem Steifigkeits- ( $E_{DM}$ ) und Querdehnverhalten ( $\nu_{DM}$ ) ermittelt aus den Versuchsdaten der Granodioritprobe GRA2-M-2.0 und der Diabasprobe DIA4-M-3.4
- 4.4 Relative Abweichungen der radialen Dehnungen an der Unterseite der Asphalttschicht in der Lastachse bei Annahme von linear und nichtlinear elastischem Materialverhalten der ungebundenen Tragschichtmaterialien; Variation Dicke und Steifigkeit der Asphalttschicht sowie der Querdehnzahl der ungebundenen Tragschichtmaterialien in den linearen Berechnungsmodellen
- 4.5 Relative Abweichungen der radialen Spannungen an der Unterseite der Asphalttschicht in der Lastachse bei Annahme von linear und nichtlinear elastischem Materialverhalten der ungebundenen Tragschichtmaterialien; Variation Dicke und Steifigkeit der Asphalttschicht sowie der Querdehnzahl der ungebundenen Tragschichtmaterialien in den linearen Berechnungsmodellen
- 4.6 Berechnungszeiten für variierende Modellannahmen bei Anwendung des Dresdner Stoffmodells zur Berücksichtigung des nichtlinear elastischen mechanischen Verhaltens verschiedener ungebundener granularer Tragschichtmaterialien
- 4.7 Einfluss der Spannungsabhängigkeit auf den Ermüdungsstatus relativ bezogen auf den GoodCase-Schichtenverbund (Wellner und Wistuba (2016, Kapitel 5)) und 30 Jahre Nutzungsdauer
- 4.8 Einfluss der Spannungsabhängigkeit auf die Berechnungsdauer des Ermüdungsstatus bei der Berechnung mit SAFEM
  
- 8.1 Vergleich der Nutzungsdauern für das Verifikationsmodell 1 und 2 `flexCALC` und `ADtoPave` gemäß den RDO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2009)
- 8.2 Vergleich der Ausfallwahrscheinlichkeiten (AusfallWSK) für die Verifikationsmodelle 1 und 2 berechnet mit `flexCALC` und `ADtoPave` gemäß den RSO Asphalt (Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen 2018)

# Schriftenreihe

## Berichte der Bundesanstalt für Straßenwesen Unterreihe „Straßenwesen“

### 2023

**S 187: Überprüfung der Geotextilrobustheitsklassen hinsichtlich neuer Produktentwicklungen**

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 188: Untersuchungen an einer CEM III-Versuchsstrecke auf der BAB A7 bei Wörrnitz**

Kuhnsch

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 189: Optimierung der Zusammensetzung Offenporiger Asphalte zur Verbesserung des Nutzungsverhaltens**

Radenberg, Breddemann

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 190: Wirtschaftlichkeitsuntersuchung an Bauweisen mit Betondecke der Belastungskategorie Bk100**

Ressel, Engel, Ferraro, Alber, Garrecht, Mielich, Wellner, Kamratowsky, Kraft

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 191: Vergleich der Gebrauchseigenschaften von Asphalten mit Polymermodifiziertem Bindemittel und Gummimodifizierten Bindemitteln mit unterschiedlichen Gummianteilen**

Hase, Beyersdorf, Hase, Rademacher, Schindler

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 192: Analyse von Auswertungs- und Bewertungsverfahren für die Anwendung des Traffic-Speed-Deflectometers auf Asphaltbefestigungen**

Čičković, Bald, Middendorf

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 193: Materialsteifigkeit des Straßenbetons im Verlauf des Ermüdungsprozesses**

Bolz, Wellner, Lindner, Schulze

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 194: Aspekte der Dimensionierung und Konstruktion zur**

**Sicherstellung der Verfügbarkeit bei temporärer Nutzung von Randbereichen von Bundesfernstraßen**

Wellner, Sommer, Clauß, Spanier, Villaret, Tschernack, Villaret, Gebhardt

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 195: Verfahren zur Bildung und Beschreibung zustandshomogener Abschnitte und repräsentativer Kennzahlen für das Erhaltungsmanagement**

Berthold, Großmann

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 196: Eignung konventioneller Prüfverfahren für Recycling-Baustoffe und industrielle Nebenprodukte im Erdbau**

Huber, Birle, Heyer, Demond

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 197: Lösungsstudie zur Umsetzung der ASR A5.2 im Kontext mit der Herstellung von Betonfahrbahndecken**

Tschernack, Gebhardt, Villaret

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 198: Erprobung von Betonfertigteilen für den Neubau und die grundlegende Erneuerung auf dem duraBAST**

Alte-Teigeler, Britz, Kispert, Riwe, Tschernack, Villaret, Lüdike

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 199: Identifizierung relevanter Klimaparameter und Bestimmung von Schwellenwerten zu gravitativen Massenbewegungen**

Steffen, Brendel

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 200: Einfluss der Betonzusammensetzung von Straßenbetonen auf die Spaltzugfestigkeit unter Berücksichtigung einer ausreichenden Dauerhaftigkeit**

Schnellenbach-Held, Eßer, Johansen

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 201: Textilbewehrter Oberbeton als Basis für eine fugenlose Oberfläche von Betonfahrbahnen**

Breitenbücher, Neumann, Curbach, Baumgärtel

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

## 2024

**S 202: Schaffung von Grundlagen für eine einheitliche Erfassung der Maschinenrohdaten im Seitenkraftmessverfahren – Weiterentwicklung der SKM-Griffigkeitsmessung durch Berücksichtigung der gemessenen Vertikalkraft**

Jürgen Schmidt, Julius Schmidt, Johannes Schmidt, Müller

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 203: Prognose der Wirtschaftlichkeit von Betonfahrbahndecken – Bauweisen RStO/RDO**

Beckenbauer, Gebhardt, Riwe, Tschernack, Villaret

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 204: Überprüfung der Auswirkungen der Anwendung der Filterregeln für Geokunststoffe des M Geok E**

Moormann, Liebl, Schlee

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 205: Alternative Verfahren zur Beurteilung Offenporiger Asphaltdeckschichten hinsichtlich Hohlraumgehalt und Verdichtungszustand**

Roos, Plachkova-Dzhurova, Schwarzmann

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

**S 206: Weiterentwicklung der rechnerischen Dimensionierung von Asphaltstraßen zur Steigerung der Wirtschaftlichkeit, Ressourceneffizienz und Nachhaltigkeit**

Neumann, Oeser, Reinhardt, Blasl, Canon Falla, Wellner, Kayser

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <https://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

---

Fachverlag NW in der Carl Ed. Schünemann KG  
Zweite Schlachtpforte 7 · 28195 Bremen · Tel.+(0)421/3 69 03-53 · Fax +(0)421/3 69 03-48  
Alternativ können Sie alle lieferbaren Titel auch auf unserer Website finden und bestellen.  
[www.schuenemann-verlag.de](http://www.schuenemann-verlag.de)

Alle Berichte, die nur in digitaler Form erscheinen, können wir auf Wunsch als »Book on Demand« für Sie herstellen.



ISSN 0943-9323  
ISBN 978-3-95606-809-6  
<https://doi.org/10.60850/bericht-s206>

[www.bast.de](http://www.bast.de)