

# **Entwicklung eines Finite Elemente Modells für die rechnerische Dimensionierung von Straßen gemäß RDO Beton**

**Berichte der  
Bundesanstalt für Straßenwesen**

**Straßenbau Heft S 127**

**bast**

# **Entwicklung eines Finite Elemente Modells für die rechnerische Dimensionierung von Straßen gemäß RDO Beton**

von

Stephan Villaret  
Alexander Kiehne  
Axel Riwe  
Karl Villaret

Villaret Ingenieurgesellschaft mbH  
Hoppegarten

**Berichte der  
Bundesanstalt für Straßenwesen**

**Straßenbau Heft S 127**

**bast**

Die Bundesanstalt für Straßenwesen veröffentlicht ihre Arbeits- und Forschungsergebnisse in der Schriftenreihe **Berichte der Bundesanstalt für Straßenwesen**. Die Reihe besteht aus folgenden Unterreihen:

A - Allgemeines  
B - Brücken- und Ingenieurbau  
F - Fahrzeugtechnik  
M - Mensch und Sicherheit  
S - Straßenbau  
V - Verkehrstechnik

Es wird darauf hingewiesen, dass die unter dem Namen der Verfasser veröffentlichten Berichte nicht in jedem Fall die Ansicht des Herausgebers wiedergeben.

Nachdruck und photomechanische Wiedergabe, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Bundesanstalt für Straßenwesen, Stabsstelle Presse und Öffentlichkeitsarbeit.

Die Hefte der Schriftenreihe **Berichte der Bundesanstalt für Straßenwesen** können direkt bei der Carl Ed. Schünemann KG, Zweite Schlachtpforte 7, D-28195 Bremen, Telefon: (04 21) 3 69 03 - 53, bezogen werden.

Über die Forschungsergebnisse und ihre Veröffentlichungen wird in der Regel in Kurzform im Informationsdienst **Forschung kompakt** berichtet. Dieser Dienst wird kostenlos angeboten; Interessenten wenden sich bitte an die Bundesanstalt für Straßenwesen, Stabsstelle Presse und Öffentlichkeitsarbeit.

Ab dem Jahrgang 2003 stehen die **Berichte der Bundesanstalt für Straßenwesen (BAST)** zum Teil als kostenfreier Download im elektronischen BAST-Archiv ELBA zur Verfügung.  
<http://bast.opus.hbz-nrw.de>

## **Impressum**

### **Bericht zum Forschungsprojekt FE 09.0188/2011/ERB:**

Entwicklung eines Finite Elemente Modells für die rechnerische Dimensionierung von Straßen gemäß RDO Beton

### **Fachbetreuung**

Bastian Wacker

### **Herausgeber**

Bundesanstalt für Straßenwesen  
Brüderstraße 53, D-51427 Bergisch Gladbach  
Telefon: (0 22 04) 43 - 0

### **Redaktion**

Stabsstelle Presse und Öffentlichkeitsarbeit

### **Druck und Verlag**

Fachverlag NW in der  
Carl Ed. Schünemann KG  
Zweite Schlachtpforte 7, D-28195 Bremen  
Telefon: (04 21) 3 69 03 - 53  
Telefax: (04 21) 3 69 03 - 48  
[www.schuenemann-verlag.de](http://www.schuenemann-verlag.de)

ISSN 0943-9323

ISBN 978-3-95606-425-8

Bergisch Gladbach, Februar 2019

## Kurzfassung – Abstract

### **Entwicklung eines Finite-Elemente-Modells für die rechnerische Dimensionierung von Straßen gemäß RDO Beton**

Die klassische Bestimmung der Dicke des Straßenoberbaus in Deutschland ist eine auf Erfahrungswerten beruhende Kategorisierung der Verkehrswege in Straßenklassen mit standardisierten Aufbauten.

Die rechnerische Dimensionierung für Straßen nach [RDO Beton 09] erlaubt es den bekannten, durch Erfahrungswerte belegten Bereich zu erweitern, sodass insbesondere für höhere Verkehrslasten und Sonderverkehrsflächen eine fundierte Dimensionierung des Oberbaus erfolgen kann.

Die Berechnung der Lastzustände nach [RDO Beton 09] basiert auf den analytischen Lösungen von Differentialgleichungen. Dies erlaubt eine einfache und schnelle Berechnung der Belastungszustände der Betonplatten. Die Berechnung ist jedoch an Bedingungen gebunden, welche für die Lösung der Differentialgleichungen vorausgesetzt werden müssen. Damit liefern diese Gleichungen nur für einen begrenzten Parameterbereich exakte Ergebnisse. Um die Dimensionierung flexibel handhaben zu können, ist es notwendig, verschiedene Einflüsse pauschal über Anpassungsfaktoren zu berücksichtigen. Die Ergebnisse werden dadurch entsprechend unsicher. Das Berechnungsverfahren nach [RDO Beton 09] erlaubt in diesem Sinne nur eine pauschale Erfassung der Querkraftübertragung in den Fugen, der Vorverformung der Platte, der Lastverteilung im Plattenquerschnitt und des Einflusses mehrerer Radlasten. Auch bezüglich der Plattengeometrie und der detaillierten Erfassung der Einflussfaktoren sind dem Berechnungsmodell enge Grenzen gesetzt.

Mit der Nutzung der Finite-Elemente-Methode ist es möglich, diese Defizite des Berechnungsmodells zu beseitigen. Die Dimensionierung wird damit genauer und flexibler. Die FEM bietet außerdem das Potenzial für eine wesentliche Weiterentwicklung des Dimensionierungsverfahrens.

Im Rahmen des Forschungsvorhabens wurde ein Finite-Elemente-Modell definiert, welches geeignet ist, in einem Dimensionierungsprogramm nach [RDO Beton 09] die Grundlage für die Spannungs-

berechnung zu bilden. Das Modell umfasst 9 aus Volumenelementen modellierte Platten, einen Volumenblock für den Untergrund, sowie Anker und Dübel.

Für die Berechnung des Modells wird das Programm CalculiX aus dem Open-Source-Bereich als Solver verwendet. Mithilfe von systematischen Serienrechnungen wurde das Modell optimiert und validiert. Um die Rechenzeit zu optimieren, wurde für die unterschiedlichen Berechnungsfälle geprüft, ob die Kalkulation der Spannungen an einem reduzierten Modell mit weniger Platten möglich ist.

Die Einbindung in die Dimensionierungssoftware AWDSTAKO ermöglicht die FEM-basierte Dimensionierung nach [RDO Beton 09].

An ausgewählten Problemstellungen wurden die neuen Möglichkeiten, welche sich durch die FEM-Berechnung ergeben demonstriert.

### **Development of a finite element model for analytic design of roads according to RDO Beton**

In Germany the classic thickness design of concrete roads is based on experienced data. A categorization of the road transport infrastructure in different road types with standardized structures was used.

The design of roads based on the [RDO Beton 09] allows to extend the known field of experienced data by calculating the necessary thickness so that the dimensioning of pavement especially for higher traffic loads or for special traffic areas can be achieved. The calculation of the charge states with the [RDO Beton 09] is based on the analytical solution of differential equations. This approach permits an easy and fast calculation of the load cases of the concrete paving slab. However, the calculation is bound to different conditions, which had to be assumed beforehand for the solution of the differential equations. Therefore, these equations provide exact results, but only in a narrow range of parameter. To handle the process of dimensioning more flexible, it is necessary to transfer different factors into matching coefficients. Because of this the solutions become more vague.

The calculation method of the [RDO Beton 09] only allows an across-the-board recording of the transference of lateral forces in the joints, the predeformation of the slab, the load distribution in the cross-section of the slab as well as the influence of diverse wheel loads.

The possibilities of this method of calculation concerning the geometry of the concrete slab and a detailed recording of the different influencing variables have narrow borders.

However, it is possible to eliminate the deficiencies of this method of calculation with the use of the finite element analysis. The dimensioning gets more precise and more flexible. Furthermore, the finite element analysis provides a high potential of an essential further development for the dimensioning methods itself.

In the context of the research project a finite element model was developed, which is suitable as a basis for a dimensioning programme according to the [RDO Beton 09] stress analysis. The model contains with volume elements discretized slabs, a with volume elements discretized subgrade as well as anchors and dowels. For the calculation of the models the openSource solver-software CalculiX is used.

The model was optimized and validated by means of methodic series of calculations. To optimize calculating time, the different modes of calculation were tested with reduced models.

The integration of this method in the dimensioning software AWDSTAKO allows the FEM-based dimensioning according to the [RDO Beton 09].

The new possibilities which arise from the FEM-based calculation method are demonstrated on selected problems.

## Inhalt

<b>1</b>	<b>Aufgabenstellung</b> . . . . .	9	3.3.3	Erhaltungssatz der mechanischen Energie . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Perspektiven für künftiges Rechenmodell</b> . . . . .	10	3.3.4	Energieerhaltung der mechanischen und thermischen Energie . . . . .	23
2.1	Verfahren nach RDO Beton 09 . . . . .	10	3.4	Hyperelastisches Materialmodell . . . . .	24
2.2	Berechnungsmodell für die Betonplatte im Dimensionierungssystem nach RDO Beton 09 . . . . .	12	3.4.1	Odgen-Materialgesetz inkompressibler Materialien . . . . .	25
2.2.1	Allgemeine Voraussetzungen . . . . .	12	3.4.2	Mooney-Rivlin-Materialgesetz inkompressibler Materialien . . . . .	25
2.2.2	Berechnung der Spannungen infolge Verkehrsbelastung . . . . .	12	3.4.3	Neo-Hooke'sches Gesetz inkompressibler Materialien . . . . .	25
2.2.3	Berechnung der Spannungen infolge Temperaturbelastung . . . . .	13	3.4.4	Verzerrungstensoren hyperelastischen Materials . . . . .	26
2.2.4	Überlagerung der Einflüsse aus Verkehrs- und Temperaturbelastung . . . . .	14	3.5	Linearisierung und Lösungsverfahren . . . . .	26
2.2.5	Grenzen des Berechnungsmodells . . . . .	14	3.5.1	Linearisierung . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Theoretische Grundlagen der FEM</b> . . . . .	16	3.5.2	Elastizitätstensoren . . . . .	26
3.1	Kontinuumsmechanische Größen . . . . .	16	3.5.3	Newton-Raphson . . . . .	27
3.1.1	Grundüberlegungen . . . . .	17	3.5.4	Ablauf einer nichtlinearen Berechnung mit der Methode der finiten Elemente . . . . .	27
3.1.2	Deformationsgradient, seine Zerlegung und Jacobideterminante . . . . .	17	<b>4</b>	<b>Modellbildung für FEM-Berechnungen</b> . . . . .	29
3.1.3	Verzerrungstensoren . . . . .	18	4.1	Geometrie . . . . .	29
3.1.4	Spannungstensoren und -vektoren . . . . .	18	4.2	Vernetzung . . . . .	29
3.1.5	Helmholz'sche freie Energie und Entropie . . . . .	19	4.3	Auflagerungsbedingungen, Kontaktbedingungen . . . . .	30
3.2	Ableitungen . . . . .	19	4.4	Lasten . . . . .	30
3.2.1	Zeitableitung bezogen auf die Initialkonfiguration . . . . .	19	4.5	Materialgesetze . . . . .	31
3.2.2	Reynolds'scher Transportsatz . . . . .	19	<b>5</b>	<b>Einordnung der FEM-Berechnung in den Dimensionierungsprozess</b> . . . . .	31
3.2.3	Lie Zeitableitung . . . . .	20	5.1	Prinzipieller Ablauf einer FEM-Berechnung im EDV-System . . . . .	31
3.3	Bilanzgleichungen und Erhaltungssätze . . . . .	20	5.2	Dimensionierung mit der Finite-Elemente-Methode . . . . .	32
3.3.1	Massenerhalt . . . . .	20			
3.3.2	Impulserhalt und Drehimpulserhalt . . . . .	21			

<b>6</b>	<b>Entwicklung eines FEM-basierten Dimensionierungssystems für Betonstraßen</b>		
		33	
6.1	Prinzipielle Vorgehensweise	33	
6.2	Modellanforderungen	33	
6.3	Untersuchte Modelle	34	
6.3.1	2D-Plattenmodell (Modell 1)	34	
6.3.2	Volumenmodell mit zweischichtigem Unterbau (Modell 2)	35	
6.3.3	Volumenmodell mit einschichtigem Unterbau (Modell 3)	35	
6.3.4	Volumenmodell mit Stablagerung (Modell 4)	36	
6.3.5	Volumenmodell mit Stablagerung und unterer Tragschicht (Modell 5)	37	
6.4	Systematische Tastrechnungen	37	
6.5	Modellspezifikationen für das Dimensionierungsprogramm	38	
6.5.1	Modellbegrenzung	38	
6.5.2	Elemente für Platten	38	
6.5.3	Elemente für untere Tragschicht	39	
6.5.4	Elemente für die Anker und Dübel	40	
6.5.5	Lagerungsbedingungen	40	
6.5.6	Definition der Verkehrslasten	41	
6.5.7	Definition der Temperaturlasten	42	
6.5.8	Materialdefinition für die Platten	43	
6.5.9	Materialdefinition für die unteren Tragschicht	43	
6.5.10	Material- und Querschnittswerte für Anker und Dübel	44	
6.6	Solver	45	
6.6.1	Z88 Aurora	45	
6.6.2	Code-Aster	45	
6.6.3	CalculiX	45	
6.6.4	Auswahl eines Solvers für die Einbindung ins Dimensionierungssystem	46	
6.7	Maßgebende Spannungen für die Nachweise	46	
6.7.1	Cauchy-Spannungen	46	
6.7.2	Vergleichsspannungen nach Mises	47	
6.7.3	Hauptspannungshypothese	48	
6.7.4	Vergleichsspannungen nach Tresca	49	
6.7.5	Spannungskriterium für Beton	50	
6.8	Relevante Lastfälle am Referenzsystem	51	
6.8.1	Temperaturlast	51	
6.8.2	Verkehrslastfälle auf einer Platte	51	
6.8.3	Untersuchte Verkehrs-Temperatur-Lastfallkombinationen	52	
6.8.4	9-Plattenmodell als Referenzsystem	52	
6.9	Verbesserung der Rechenzeit – Reduktion der Modellgröße	54	
6.9.1	Reduktion des Modells	54	
6.9.2	6-Plattenmodell	54	
6.9.3	4-Plattenmodell	55	
6.9.4	Einzelplatte	56	
6.9.5	Ausgeschlossene Plattensysteme	57	
6.10	Verifikation und Kalibrierung des FE-Modells	58	
6.10.1	Verifikation der Modellierung und Diskretisierung der Platte anhand der Verformung unter Temperaturlast	58	
6.10.2	Verifikation der Modellierung und Diskretisierung der Anker und Dübel anhand der Querkraftübertragung und dem Wirksamkeitsindex	58	
6.10.3	Kalibrierung der Modellierung des Untergrundes anhand der Randeinsenkungen	59	
6.11	Einbindung der FEM-Berechnung in das Dimensionierungssystem AWDSTAKO	60	
6.11.1	Grundsätze	60	
6.11.2	Neuer Iterationsalgorithmus	60	
6.11.3	Modifikationen bei der Berücksichtigung der Querkraftübertragung in den Fugen	61	
6.11.4	Programmtechnische Umsetzung	62	

---

<b>7</b>	<b>Dimensionierung mit probabilistischen Verfahren und der FEM</b> .....	63
<b>8</b>	<b>Spezielle Untersuchungsergebnisse</b> .....	64
8.1	Untersuchungsergebnisse an Einzelplatten. ....	64
8.1.1	Nachrechnung der kritischen Länge. . .	64
8.1.2	Berechnung einer Platte mit nicht-linearem Temperaturgradienten .....	64
8.2	Tastrechnungen mit FEM zum Spaltzug .....	66
8.2.1	Modellierung des Spaltzugversuches. ....	66
8.2.2	Vergleich der Spaltzugfestigkeit mit den Hauptzugspannungen in der Simulation .....	67
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b> . . .	67
	<b>Literatur</b> .....	69
	<b>Bilder</b> .....	70
	<b>Tabellen</b> .....	73



## 1 Aufgabenstellung

Die „Richtlinien für die rechnerische Dimensionierung von Betondecken im Oberbau von Verkehrsflächen“, Ausgabe 2009 [RDO Beton 09] sind in der FGSV erarbeitet worden und mit ARS Nr. 21/2010 vom BMVBS bekanntgegeben und zur Anwendung empfohlen worden. Dieses Regelwerk ermöglicht eine ingenieurgerechte und wirtschaftliche Berechnung von Verkehrswegebefestigungen mit unbewehrter Betondecke.

Das Berechnungsprinzip folgt dabei den Methoden der Dimensionierung nach Grenzzuständen im Grenzzustand der Tragfähigkeit (GZT) und der Gebrauchstauglichkeit (GZG) sinngemäß zu den Regelungen der [DIN 1045-1]. Dabei wird eine semiprobabilistische Verfahrensweise angewandt, die den besonderen Gegebenheiten von Verkehrsflächen genügt. Maßgebender Punkt ist dabei die Zulassung höherer Ausfallraten, jedoch differenziert nach Nutzungsart, -dauer und Berechnungsfall, während der normativen Nutzungszeit, da im Gegensatz zum übrigen Bauwesen einerseits eine Gefahr für Leib und Leben so gut wie ausgeschlossen werden kann und andererseits ein wirtschaftlicher Nutzungsausfallzeitpunkt avisiert wird.

Das rechnerische Grundprinzip stellt einwirkende Momente aufnehmbaren Momenten gegenüber. Dabei kann auf der Seite der Einwirkungen die Verkehrsbelastung nach Menge, Achslastverteilung und -konfiguration differenziert werden. Die Belastung aus Witterung kann durch die Wahl maßgebender Temperaturgradienten in Abhängigkeit vom jeweiligen Berechnungsfall und der Örtlichkeit nach neueren Forschungsergebnissen [FE 04.194/2004/AGB und FE 04.197/2004/ARB] ebenfalls differenziert angesetzt werden. Darüber hinaus können beide Belastungskomplexe mit Abschluss des Forschungsthemas [FE 04.218/2008/ARB] auch mit ihren maßgeblichen Verteilungsfunktionen in das Berechnungssystem eingeführt werden.

Die zugrunde gelegten Modellannahmen setzen momentan eine Reihe von Idealisierungen voraus, die bei immer vielfältiger werdenden Einsätzen der rechnerischen Dimensionierung nicht immer hinreichend genaue Ergebnisse erzielen. Beispielhaft soll hier genannt werden:

- Es können nur Plattengeometrien berechnet werden die sich einem Rechteck/Quadrat annähern [WEST 1926].

- Querkraftübertragung zwischen zwei Nachbarplatten mittels Anker und Dübeln kann nur pauschal mit einem Faktor berücksichtigt werden [RDO Beton 09; FE 08.160/2000/CRB].
- Die Wirkung der Unterlage wird nur zutreffend beschrieben, solange eine theoretische volle Verbundtrennung bei aktivierter Reibung angesetzt werden kann [RDO Beton 09; FE 08.160/2000/CRB und PFEI 1973].
- Hohlagerungen können nur pauschal berücksichtigt werden [RDO Beton 09; FE 08.160/2000/CRB und INNO 2011].
- Die Berücksichtigung von feuchte- und temperaturabhängigen Plattenverformungen (Aufschüselung oder Aufwölbung) ist nur möglich, wenn eine idealisierte Form gemäß [RDO Beton 09] Bild A 2.1 oder A 2.2 vorausgesetzt werden kann.
- Verkehrslasten müssen im Berechnungsmodell immer mittels kreisförmiger Ersatzaufstandsfläche nach [WEST 1926] idealisiert und in der Betondecke verteilt werden [PI/RAY 1951].
- Es wird vorausgesetzt, dass eine Verkehrslast nach [PI/RAY 1951 und TEL/SUTH 1935-43] in der jeweiligen Mitte des Plattenrandes immer maßgebend ist.

Die genannten Bedingungen sind zwar für praxistypische Fahrbahnen im Allgemeinen gut erfüllt, für besondere Anwendungsfälle (z. B. Lagerflächen, Kreisverkehre usw.), sind die Anwendungsgrenzen des Systems aber noch nicht hinreichend genau bestimmt. Zur allgemeinen Öffnung des Dimensionierungsverfahrens ist es daher von großem Nutzen, ein Finite-Elemente-Modell zu entwickeln, das Aussagen zu den momentan nicht abgedeckten Fällen trifft und mit deren Hilfe man die Wirkung einzelner Parameter testen kann.

Ziel des Forschungsvorhabens ist es, ein Finite-Elemente-Modell zu entwickeln, mit dessen Hilfe eine flexiblere und zielgenauere Berücksichtigung der dimensionierungsrelevanten Einflussgrößen möglich wird. Dabei ist nichtlineares Material- und Modellverhalten in die Überlegungen mit einzubeziehen und ggf. zu berücksichtigen.

Auf Basis des theoretischen Modells wird ein Dimensionierungssystem mit Handlungsanweisung entwickelt, welches dem zukünftigen Nutzer eine anwenderfreundliche und praxisorientierte rechnerische Dimensionierung von Straßen gemäß [RDO

Beton 09] ermöglicht. Somit wird eine Kontinuität in der Dimensionierungspraxis für Anwender und Entwickler gesichert.

## 2 Perspektiven für künftiges Rechenmodell

### 2.1 Verfahren nach RDO Beton 09

Mit den [RDO Beton 09] wird zurzeit ein semiprobabilistisches Verfahren angewandt. Dabei werden unterschiedliche Sicherheitsfaktoren (Teilsicherheitsfaktoren) angesetzt, die die unterschiedlichen Streubreiten der Einflussgrößen berücksichtigen und die entsprechend des erforderlichen Sicherheitsniveaus variiert werden können

Im Teilsicherheitskonzept (Last-, Anpassungs- und Materialfaktoren) gehen rund 40 Einzeleinflüsse in das einwirkende bzw. in das aufnehmbare Moment ein, deren Gegenüberstellung zum Dimensionierungsergebnis führt.

Die Dimensionierung für Betondecken im Oberbau von Verkehrsflächen wird mit dem Programm [AWDSTAKO] in der aktuellen Programmversion 1.7 vorgenommen.

Die Systematik ist in Bild 2-1 dargestellt.

Die Grundbeziehung der Nachweisführung ist gemäß der allgemeinen Verfahrensweise im Rahmen der europäischen Normung für Betonbauweisen definiert.

Sie wurde spezifiziert für den Betonstraßenbau:

$$\text{einwirkendes Moment } M_E \leq \text{aufnehmbares Moment } M_R$$

Sowohl auf das einwirkende als auch auf das aufnehmbare Moment kristallisieren sich dabei eine

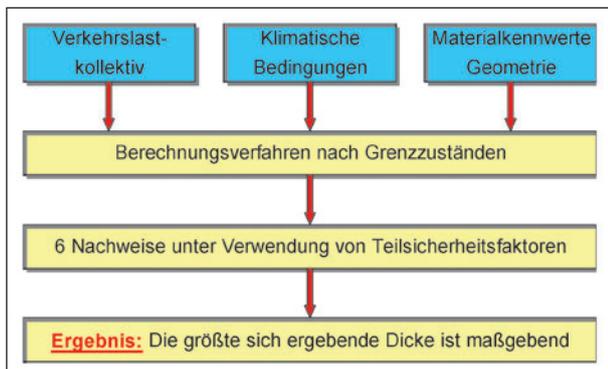


Bild 2-1: Systematik der Nachweisführung

große Anzahl von Einflüssen (Bild 2-2 bis Bild 2-5) heraus. Diese sind in diesen Übersichten zusammengestellt und werden bei der Dimensionierung berücksichtigt.

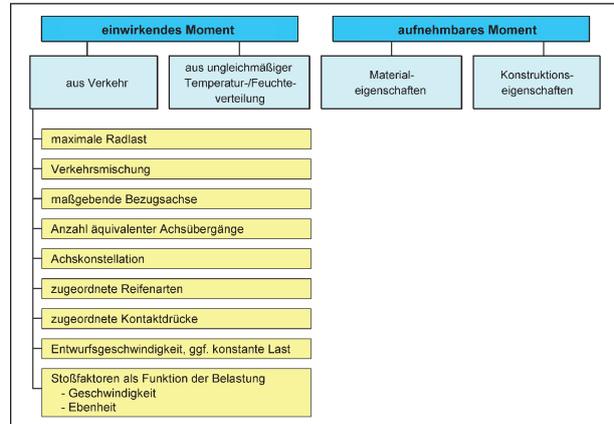


Bild 2-2: Einwirkendes Moment – Einflüsse aus Verkehr

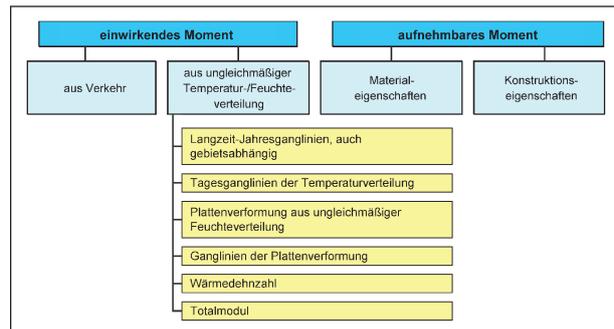


Bild 2-3: Einwirkendes Moment – Einflüsse aus klimatischen Bedingungen

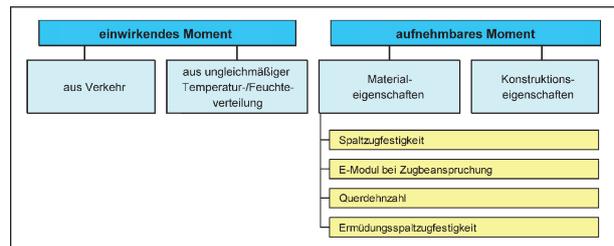


Bild 2-4: Aufnehmbares Moment – Einflüsse aus Materialeigenschaften

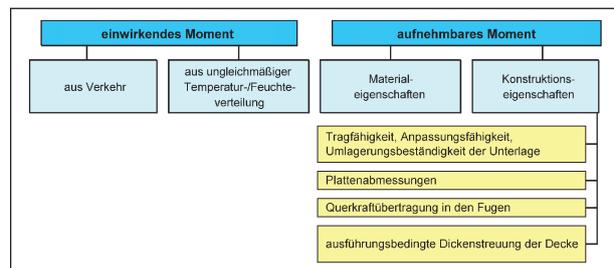


Bild 2-5: Aufnehmbares Moment – Einflüsse aus Konstruktion

Im Rahmen der System- und Programmentwicklung wurden, wie bei semiprobabilistischen Nachweismethoden üblich, aus den einzelnen Einflüssen und deren statistischer Verteilung Last-, Anpassungs- und Materialfaktoren erarbeitet. Die Grundlagen hierfür beruhen u. a. auf Achslastwägungen der Bundesanstalt für Straßenwesen, auf Untersuchungen der RWTH Aachen zum dynamischen Lastanteil und auf Untersuchungen der CONTI zur Abhängigkeit des Kontaktdrucks von Radlast und Reifenfülldruck. Zudem konnte auf der Entwicklungsarbeit Müller/Pfeifer zur verteilungs- und abstandsabhängigen Ermittlung der Momentenverteilung insbesondere für den Lastfall Plattenrand aufgebaut werden. Zur Ableitung der Lastfaktoren für die Temperaturbelastung wurden die real vorkommenden Temperaturgradienten in Abhängigkeit von der Deckendicke und der Amplitude der Lufttemperatur analysiert. Die Materialfaktoren wurden aus der statistischen Auswertung von Prüfergebnissen aus der Baupraxis bzw. aus Forschungsvorhaben gewonnen. Ein umfangreiches Forschungsvorhaben zu dieser Thematik wurde im Jahr 2005 an der TU Dresden (unter Betreuung durch die System-/ Programmentwicklerin) abgeschlossen.

Unter Berücksichtigung der Häufigkeit ihres Auftretens wurden daraus für die jeweils sechs zu führenden Nachweise die folgenden Faktoren (Bild 2-6) abgeleitet. Die Bezeichnungen wurden dem Prinzip der europäischen Normung entnommen.

Alle genannten Faktoren gehen direkt oder indirekt, z. B. über die Berechnungsrادlast, in die Dimensionierung ein.

Die Grundbeziehungen für die Momente werden im Folgenden dargelegt.

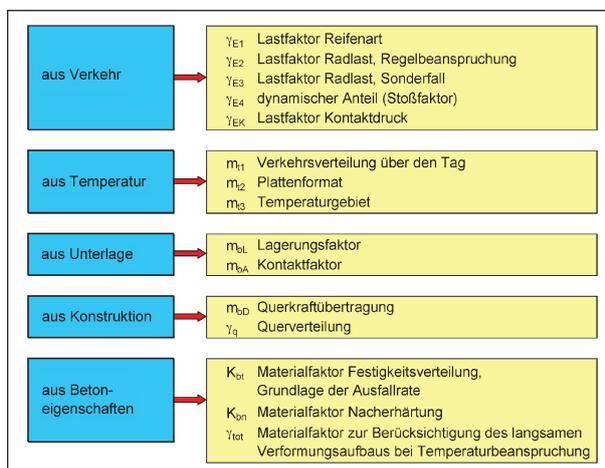


Bild 2-6: Last-, Anpassungs- und Materialfaktoren

In das aufnehmbare Moment

$$M_R = 0,167 \cdot h_d^2 \cdot f_d \quad (2-1)$$

gehen Einflüsse aus den Materialeigenschaften und aus der Konstruktion ein.

Das einwirkende Moment

$$M_E = M_{E\text{Verkehr}} + M_{E\text{Temperatur}} \quad (2-2)$$

wird bestimmt durch Beanspruchungen aus Verkehrslasten und klimatischen Gegebenheiten. Die Summe aus dem einwirkenden Moment aus Verkehr

$$M_{E_V}; M_{E_{V_u}} = m_{bL} \cdot m_{bD} \cdot F_d \cdot 1000 \cdot \left[ 0,55 \cdot \lg\left(\frac{l_v}{b}\right) + 0,1 \cdot \frac{b}{l_v} - 0,011 \right] \quad (2-3)$$

und dem einwirkenden Moment aus der Temperatur

$$M_{E_t}; M_{E_{t_u}} = \alpha_{cT} \cdot \gamma_{tot} \cdot E_{ctm} \cdot \frac{h_m^3 \cdot m_{t1} \cdot m_{t2} \cdot m_{t3} \cdot \delta_t}{12} \quad (2-4)$$

ergibt schließlich das einwirkende Moment.

Der Index u bezieht sich dabei auf die Tragfähigkeitsnachweise.

Die Berechnungsfestigkeit

$$f_d = m_b \cdot f_d^0 \quad (2-5)$$

kann mithilfe des Grundwertes der Berechnungsfestigkeit

$$f_d^0 = k_{bn} \cdot \frac{f_{ctk,core}}{k_{bt}} \quad [N/mm^2] \quad (2-6)$$

ermittelt werden.

Dabei ist  $f_{ctk,core}$  die prüf- und auswertetechnisch nachzuweisende charakteristische Spaltzugfestigkeit.

Mit  $k_{bt}$  regelt sich die angezielte dimensionierungstechnisch begründete Ausfallwahrscheinlichkeit. Sie wird im Bereich für Autobahnen bei bis zu 5 % angesiedelt.

Einerseits könnten einkalkulierte höhere Prozentsätze gerissener Platten bereits bei hohen Einzellasten zu einem frühen Zeitpunkt eintreten, andererseits ergibt sich aufgrund des logarithmischen Verlaufs der Ermüdungskurven in den ersten Jahren relativ zum Zustand am Ende der Nutzungsdau-

er der höchste Zuwachs gerissener Platten. Würde man am Ende eine Ausfallrate von 35 % zulassen, so wäre nach 6 bis 10 Jahren schon ein Anteil von ~ 25 % betroffen. Dieser Fall ist im Sinne einer Minimierung des Erhaltungsaufwands auszuschließen.

Der Faktor  $k_{bn}$  wird gleich 1 gesetzt, da der Ansatz einer Nacherhärtung mit Werten  $k_{bn} > 1$  nicht einheitlich betrachtet werden kann und daher zu unsicher ist.

Der Anpassungsfaktor  $m_b$  ist für den Ermüdungsfall definiert mit  $1/\gamma_{c,fat}$ , wobei  $\gamma_{c,fat}$  Bild 2-7 zu entnehmen ist. Die Unterschiede der Kurven ergeben sich aus der Häufigkeit der an der Längs- und Querfuge vorkommenden Momente.

Das Bild 2-8 zeigt die prinzipielle Vorgehensweise bei der Ermittlung der erforderlichen Deckendicke.

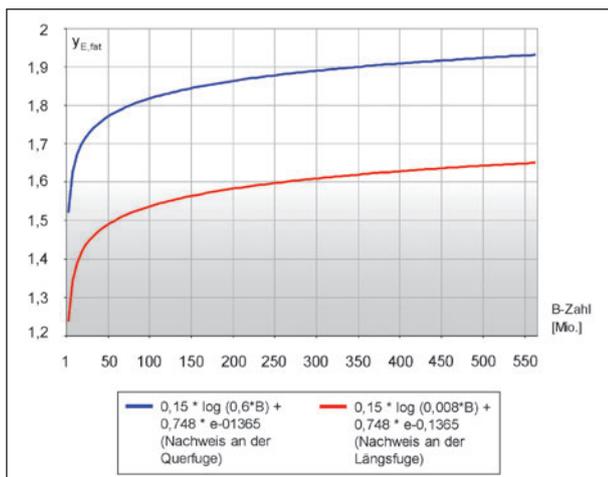


Bild 2-7: Ermüdungskurven für Nachweisfälle an Quer- und Längsfuge

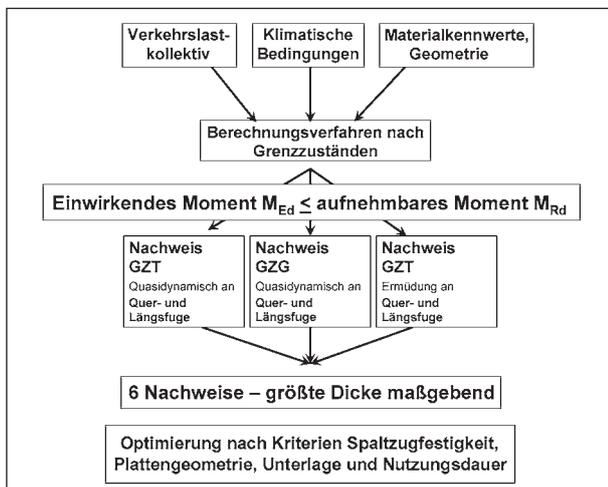


Bild 2-8: Iterativer Rechenprozess zur Ermittlung der erforderlichen Deckendicke

Die größte ermittelte Deckendicke der sechs Nachweisfälle ist maßgebend. Die Deckendicke wird dabei als Solldicke beim 10%-Quantil ermittelt.

## 2.2 Berechnungsmodell für die Betonplatte im Dimensionierungssystem nach RDO Beton 09

### 2.2.1 Allgemeine Voraussetzungen

Die Berechnungsmodelle für die Ermittlung der Spannungen infolge Verkehrs- bzw. Temperaturbelastung beinhalten zahlreiche idealisierende Annahmen. Für beide Belastungsfälle gelten folgende Voraussetzungen:

- die Platte ist rechteckig,
- linear-elastisches Materialverhalten,
- Gültigkeit der Bernoulli-Hypothese (Ebenbleiben der Querschnitte unter Belastung),
- vollkommene Ebenheit der unbelasteten Platte (keine Vorverformung),
- freie Plattenränder,
- für die Dimensionierung maßgebend ist Zugspannung im Beton in der Mitte der Plattenränder, parallel zum Plattenrand,
- für die Dimensionierungsstelle wird ein einachsiger Spannungszustand angenommen,
- keine Berücksichtigung von Normalspannungen in der Platte.

Auf weitere Idealisierungen, welche speziell für die Belastungsfälle Verkehr und Temperatur gemacht werden, wird in den folgenden Kapiteln eingegangen.

### 2.2.2 Berechnung der Spannungen infolge Verkehrsbelastung

Für die Berechnung der Spannungen infolge Verkehrslast wird die bekannte Formel von WESTERGAARD in einer durch TELLER und SUTHERLAND empirisch verbesserten Variante verwendet.

Dabei ist das Biegemoment in einer Platte direkt unter einer Last am Plattenrand

$$M_v = F \cdot \left( 0,55 \log \left( \frac{l_v}{b} \right) + 0,1 \cdot \frac{b}{l_v} - 0,011 \right) \quad (2-7)$$

abhängig von der Radlast  $F$  und der elastischen Länge  $l_v$ . Die elastische Länge

$$l_v = \left( \frac{E_{ctm} \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2) \cdot k} \right)^{0,25} \quad (2-8)$$

errechnet sich dabei u. a. aus dem E-Modul des Betons  $E$ , der Querdehnzahl  $\mu$ , der Plattendicke  $h$  und der Bettungszahl  $k$ .

Der Halbmesser des fiktiven Belastungskreises

$$b = \sqrt{1,6 \cdot a + h^2} - 0,675 \cdot h \quad \text{für } a < 1,724 \cdot h \text{ [mm]} \quad (2-9)$$

$$b = a \quad \text{für } a > 1,724 \cdot h \text{ [mm]} \quad (2-10)$$

hängt vom wirklichen Belastungskreis mit dem Belastungskreishalbmesser

$$a = \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot p}} \quad (2-11)$$

und von der Plattendicke  $h$  ab.

Die maximale Biegespannung

$$\sigma_v = \frac{M_v}{W} \quad (2-12)$$

ergibt sich aus dem Quotienten aus  $M_v$  und dem Widerstandsmoment  $W$ .

Mit dem Widerstandsmoment für den laufenden Meter Plattenquerschnitt

$$W = h^2 \cdot 1.000 \text{ mm} \cdot \frac{1}{6} = 167 \text{ mm} \cdot h^2 \quad (2-13)$$

kann die maximale Biegespannung

$$\sigma_v = \frac{F}{0,167 \cdot h^2} \cdot \left( 0,55 \log \left( \frac{l_v}{b} \right) + 0,1 \cdot \frac{b}{l_v} - 0,011 \right) \quad (2-14)$$

berechnet werden.

Die Westergaard-Formel stellt eine Lösung der Differentialgleichung für eine elastisch gebettete dünne Platte dar. Dieser Lösung liegen folgende Annahmen zugrunde [GOLDSCHMIDT 1990]:

- Gültigkeit der Kirchhoff'schen Plattentheorie (Platte als Fläche idealisiert, keine Schubverzerrungen),
- Plattenbettung auf idealisierten Federn (Winklerbettung),

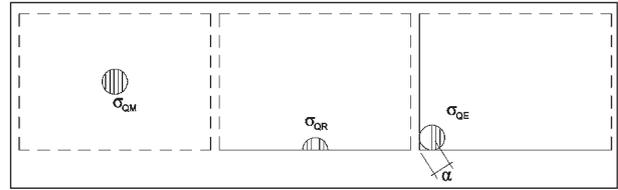


Bild 2-9: Lastfälle – Verfahren nach WESTERGAARD; die Lastfälle  $\sigma_{QM}$  und  $\sigma_{QE}$  werden nicht berücksichtigt, nur der Lastfall  $\sigma_{QR}$  wird in den [RDO Beton 09] betrachtet

- keine Reibung zwischen Platte und Unterlage,
- die Last wird mit einer halbkreisförmigen Aufstandsfläche am Plattenrand angesetzt. WESTERGAARD gibt auch Lösungen für Lasten in Plattenmitte bzw. an der Plattenecke mit kreisrunden Aufstandsflächen (Topflast) an (siehe Bild 2-9). Diese Laststellungen werden in den [RDO Beton 09] aber nicht berücksichtigt,
- die Platte hat senkrecht und parallel zum Rand keine weitere Begrenzung (halbunendliche Ausdehnung).

### 2.2.3 Berechnung der Spannungen infolge Temperaturbelastung

Die Spannungen, die sich bei ungleichmäßiger Erwärmung in der Betonplatte ergeben, werden mit dem Formelwerk nach [EI 1979] erfasst.

Der ungleichmäßige Temperaturverlauf über den Plattenquerschnitt wird dabei als linear angenommen.

Erfolgt eine Erwärmung der Betonplatte von oben, neigt diese dazu, sich aufzuwölben. Dieser Aufwölbung wirkt das Eigengewicht der Betonplatte entgegen, was zur Aktivierung eines Biegemomentes führt. Dieses erzeugt Biegezugspannungen an der Plattenunterseite (Wölbspannungen). Ab einer bestimmten Länge ( $l_{krit}$ ) legt sich die Platte in der Mitte wieder auf (Bild 2-10 bis Bild 2-12). Für den nicht gekrümmten Abschnitt bei Betonplatten mit einer Länge  $> 1,1 \cdot l_{krit}$  lässt sich die ungestörte Wölbspannung

$$\sigma_w = \frac{1}{1 - \mu} \cdot \frac{h \cdot \Delta t}{2} \cdot \alpha \cdot E \quad (2-15)$$

berechnen.

Bei einer Plattenlänge von  $l = l_{krit}$  bzw. bei langen Platten im Abstand von  $1/2 \cdot l_{krit}$  von den Enden tritt infolge ungleicher Verläufe der Krümmungen als

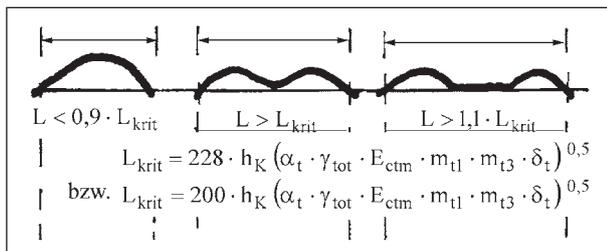


Bild 2-10: Ohne konkave Verformung – bei Erwärmung von oben

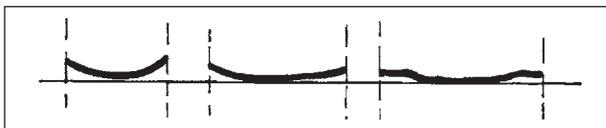


Bild 2-11: Konkave Verformung bei Austrocknung (Schwinden) von oben → nicht voll reversibel

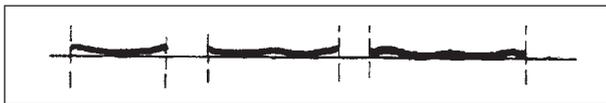


Bild 2-12: Verhalten bei nachfolgender Erwärmung

Resultat aus ungleichmäßiger Erwärmung und Eigengewicht eine um 20 % erhöhte Wölbspannung auf. Dabei kann die erhöhte Wölbspannung

$$\sigma_w' = 1,2 \cdot \sigma_w \quad (2-16)$$

abgeleitet werden.

Bei Plattenlängen kleiner als  $0,9 \cdot l_{krit}$  kommt es zu einem Abbau der Wölbspannung durch Verformung der Platte. Die reduzierte Wölbspannung kann mit

$$\sigma_w'' = \left( \frac{l_{red}}{0,9 \cdot l_{krit}} \right) \cdot \sigma_w \quad (2-17)$$

angegeben werden.

Bei einer Plattenauflagerung auf einer relativ nachgiebigen Unterlage (ungebundene Tragschicht) kommt es zur Einsenkung der Plattenecken, was zur Reduktion der anzusetzenden Spannweite führt. Dies wird durch die Einführung einer reduzierten Plattenlänge ( $l_{red}$ ) berücksichtigt.

Der maßgebende Dimensionierungspunkt wird grundsätzlich in der Mitte des Plattenrandes angesetzt. Somit wird bei Plattenlängen  $l > 1,1 \cdot l_{krit}$  die erhöhte Wölbspannung nicht angesetzt.

Die Zugseite wechselt zwischen oben und unten. Die Zugspannungen sind annähernd gleich.

Im Berechnungsalgorithmus werden ausschließlich die Wölbspannungen infolge des Temperaturunter-

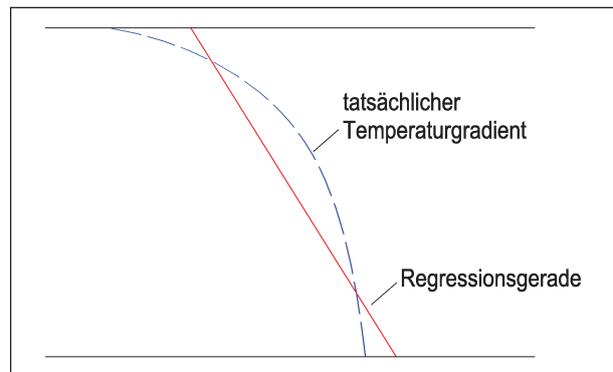


Bild 2-13: Definition des Temperaturgradienten in der Straße

schiedes an Plattenober- und Unterseite berücksichtigt. Die Eigenspannungen infolge eines nicht-linearen Temperaturgradienten im Plattenquerschnitt, bleiben außer Betracht. Aus diesem Grund wird lediglich der lineare Temperaturgradient berücksichtigt. Dieser wird definiert als lineare Regression des tatsächlichen Gradienten (siehe Bild 2-13) [FE 04.194/2004/AGB und FE 04.197/2004/ARB].

## 2.2.4 Überlagerung der Einflüsse aus Verkehrs- und Temperaturbelastung

Die Überlagerung der mit den unter Kapitel 2.2.2 und Kapitel 2.2.3 beschriebenen Methoden berechneten Spannungen erfolgt durch Summation. Dabei werden jeweils nur die an der Dimensionierungsstelle auftretenden Zugspannungen berücksichtigt.

Die Erhöhung der Biegemomente infolge Verkehrslast, welche sich aus einer Vorverformung der Platte durch Temperatur und Schwindeinflüsse ergibt, wird mit der empirisch verbesserten Westergaardformel [TEL/SUTH 1935-43] erfasst.

## 2.2.5 Grenzen des Berechnungsmodells

Die beschriebenen, mit der Modellbildung einhergehenden, Vereinfachungen haben teilweise großen Einfluss auf die Ergebnisse der Berechnungen und schränken damit die Brauchbarkeit des Verfahrens ein. Die durch die Idealisierungen nicht oder nur unzureichend erfassten Einflüsse müssen deshalb durch Beiwerte, Anpassungsfaktoren und eine Ergebniskalibrierung berücksichtigt werden.

Die für die Anwendung der Westergaardformel notwendige Voraussetzung, freie Plattenränder anzunehmen, ist offenbar in der Praxis nicht erfüllt. Hier

sorgen Dübel für eine wirksame Querkraftübertragung (Bild 2-14 bis Bild 2-18).

Der Dübeleinfluss wird in den [RDO Beton 09] pauschal über einen Anpassungsfaktor ( $m_{bD}$ ) erfasst. Eine Übertragung von Biegemomenten durch die Dübel (z. B. bei der temperaturbedingten Aufwölbung bzw. Aufschüsselung der Platten) wird nicht berücksichtigt.

Weiter ist zu beachten, dass die Wirksamkeit der Dübel auch von der Größe der Nachbarplatte abhängt. Der entsprechende Zusammenhang lässt

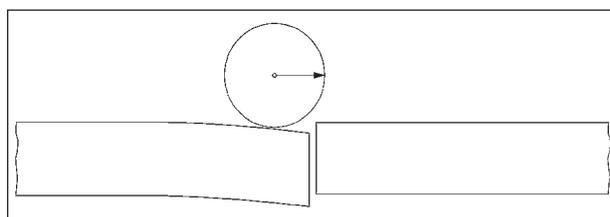


Bild 2-14: Einsenkung des Fugenrandes ohne Dübel

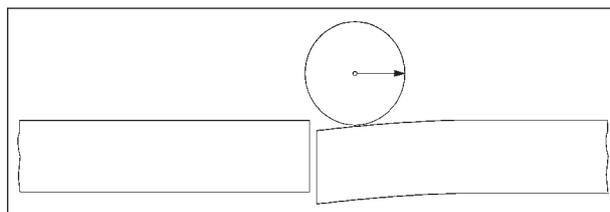


Bild 2-15: Einsenkung des Fugenrandes ohne Dübel

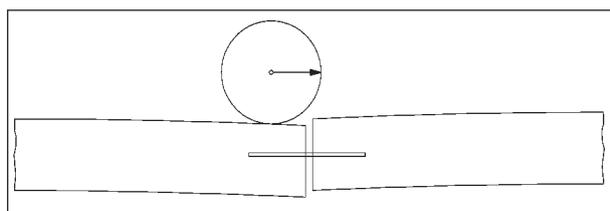


Bild 2-16: Einsenkung des Fugenrandes mit Dübel

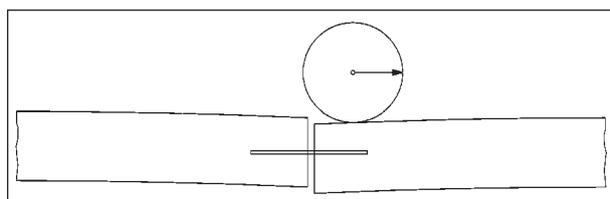


Bild 2-17: Einsenkung des Fugenrandes mit Dübel

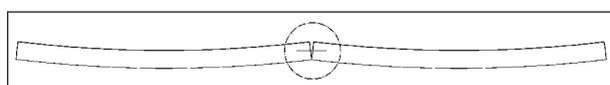


Bild 2-18: Behinderung der freien Plattenverformung im Dübelbereich

sich nur an einem komplexen Modell quantifizieren (Bild 2-19).

Die in der Westergaardformel angesetzte Topflast kann als Radlast interpretiert werden, welche in der Mitte eines Plattenrandes steht. Die Formel gibt die Spannungen im Querschnitt direkt unter der Last an. Die Spannungen, welche die normalerweise vorhandenen weiteren Radlasten in diesem Querschnitt erzeugen, werden durch die Formel nicht erfasst. Die [RDO Beton 09] berücksichtigen diese Lasten durch Lasterhöhungsfaktoren, mit denen die Topflast beaufschlagt wird. Der Einfluss unterschiedlicher Radabstände kann damit nicht erfasst werden.

Die der Westergaardformel zugrundeliegende Modellvorstellung idealisiert die Platte als Fläche in der Systemebene. Damit hat die Platte keine Dicke und folglich erfolgt auch keine Verteilung der Radlast innerhalb der Platte. Es stellt sich damit die Frage, wie groß die Radaufstandsfläche also der Radius der Topflast angesetzt werden muss. Diese Frage ist mit der Westergaardformel nicht zufriedenstellend gelöst. Für besonders dicke Platten (Sonderverkehrsflächen) ist die Gültigkeit der in den [RDO Beton 09] angegebenen Formeln für die Lasteinleitungsfläche nicht gesichert. Dies ist mit entsprechenden Sicherheitszuschlägen bei der Dimensionierung zu berücksichtigen.

Wie oben erwähnt, setzt die Westergaardformel eine halbumendlich ausgedehnte Platte voraus. Damit sind bei der Anwendung der Formel Grenzwerte für die Plattengeometrie einzuhalten. Die klei-

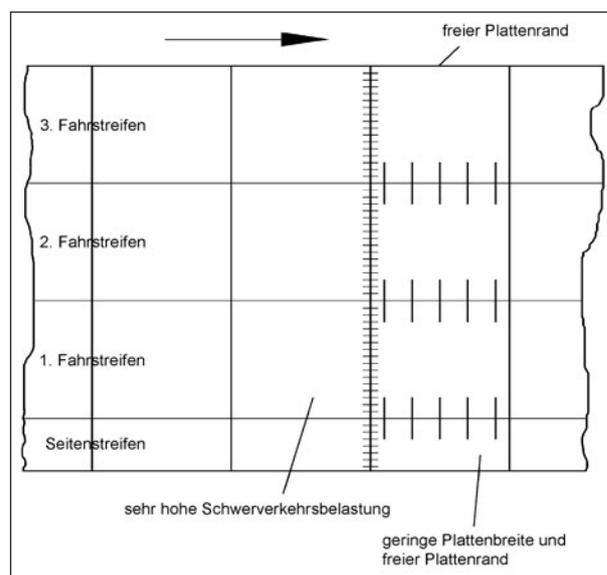


Bild 2-19: Unterschiedliche Kraftübertragung am Plattenrand

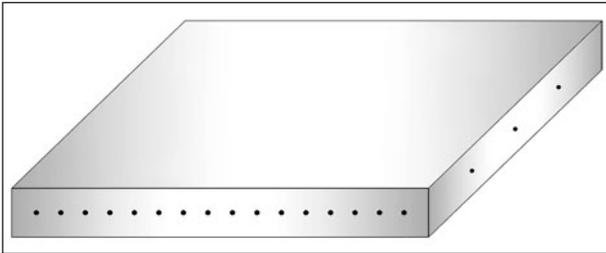


Bild 2-20: Ebene Platte

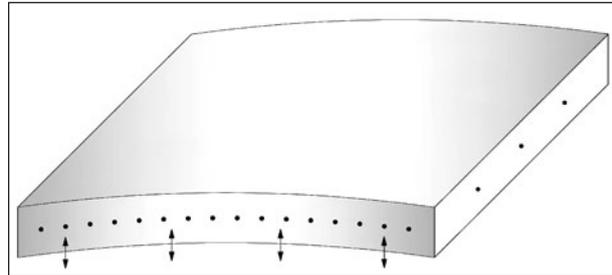


Bild 2-22: Aufwölbung in einer Richtung

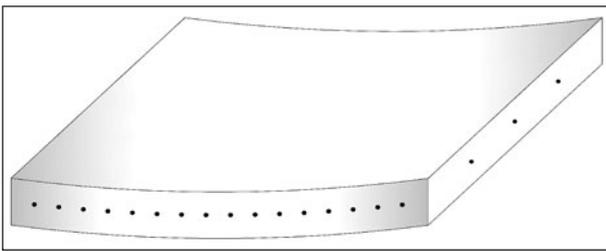


Bild 2-21: Aufschlüsselung in einer Richtung

Die Plattenseite sollte mindestens 5-mal so lang sein wie die elastische Länge  $l_v$ . Bei der Dimensionierung von kleinen, hoch belasteten Platten ist damit die Anwendbarkeit eingeschränkt.

Die Anwendung der Westergaardformel setzt, wie bereits erläutert, einen geraden Plattenrand und eine hinreichende Ausdehnung der Platte voraus. Damit ist die Anwendbarkeit der Formel prinzipiell nicht an die Rechteckform gebunden. Für die in den [RDO Beton 09] benutzte verbesserte Formel von TELLER und SUTHERLAND [TEL/SUTH 1935-43] trifft dies jedoch nicht zu. Die Verbesserung der Formel erfolgte mithilfe empirischer Werte, welche an Rechteckplatten gewonnen wurden. Eine Anwendung der Formel für andere Geometrien ist daher nicht ohne weiteres möglich.

Die temperaturbedingten Verformungen der Betonplatte zeigen sich als Aufwölbung (positiver Temperaturgradient) oder Aufschlüsselung (negativer Temperaturgradient). Diese Verformungen bilden sich selbstverständlich in beiden Richtungen heraus. Bei der Berechnung der Temperaturspannungen mit den Eisenmannformeln wird aber nur die Aufwölbung in einer Richtung berücksichtigt (Bild 2-20 bis Bild 2-22).

Dies hat vor allem Bedeutung für die Berechnung der Biegespannungen infolge Verkehrslast auf dem vorverformten System. Die einfache Superposition der Biegespannungen infolge Verkehrslast auf der ebenen Platte und der Temperaturspannungen liefert keine korrekten Ergebnisse. Der Gebrauch der

Formel nach TELLER und SUTHERLAND führt diesbezüglich zu einer Verbesserung, kann aber nicht den konkreten Einzelfall erfassen.

Die genannten Unzulänglichkeiten des vorhandenen Berechnungsmodells liegen darin begründet, dass geschlossene Formeln verwendet werden, welche das gesamte System beschreiben. Damit ist es notwendig, die Anzahl der Parameter auf eine überschaubare Größe zu begrenzen. Die Details des Modells können somit nur sehr pauschal erfasst werden.

Die Idee der FEM besteht darin, das System in kleine Teile (finite Elemente) zu zerlegen und unter Einhaltung der Gleichgewichtsbedingungen sowie der kinematischen Verträglichkeit jedes Element für sich zu berechnen.

Das so definierte Berechnungsmodell ist sehr flexibel und kann bezüglich der Geometrie, Belastung und den Randbedingungen den konkreten Anforderungen angepasst werden. Die genannten Defizite des bisher verwendeten Modells können damit beseitigt werden.

## 3 Theoretische Grundlagen der FEM

### 3.1 Kontinuumsmechanische Größen

Die Formulierungen der Kontinuumsmechanik für Festkörper sind Darstellungen der Größen sowie Grundgleichungen der Mechanik in Schreibweise der Tensoranalysis und dienen der Beschreibung von Kontinuen. Alle Körper und Stoffe, deren makroskopische Dimension viel größer als die ihrer Fehlstellen ist, können als Kontinuum aufgefasst und beschrieben werden.

### 3.1.1 Grundüberlegungen

Ein real existierender Körper  $B$ , der als Kontinuum aufgefasst werden kann und den Partikel  $P \in B$  beinhaltet, wird mathematisch abstrahiert in einen Vektorraum  $V$  abgebildet. Üblicherweise ist  $V$  der euklidische Raum  $R^3$  mit den orthonormalen Basisvektoren  $\varepsilon = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$  und einem festen Koordinatenursprung  $0$ . Ein Abbild von  $B$  in  $V$  wird Konfiguration von  $B$  genannt. Ausgehend von einer Initialkonfiguration  $\Omega_0$  mit dem beinhaltenden Punkt  $\underline{X}_0$  zu einem gewählten Zeitpunkt  $t_0$  kann der Körper unendlich viele Konfigurationen (Bild 3-1) einnehmen. Die Abbildung  $X$  bildet in  $V$  von der Initialkonfiguration  $\Omega_0$  mit dem beinhaltenden Punkt  $\underline{X}_0 \in \Omega_0$  auf die Momentankonfiguration

$$\Omega = X(\Omega_0) \tag{3-1}$$

mit dem beinhaltenden Punkt

$$\underline{x} \in X(\underline{X}_0) \tag{3-2}$$

ab. Im mechanischen Sinne steht  $X$  für die Bewegung und Deformation die eine Konfiguration im Zeitraum von  $t_0$  bis  $t$  durchläuft. Mithilfe der Größen und Grundgleichungen aus der klassischen Mechanik werden die Spannungs- und Verzerrungszustände der Momentankonfiguration  $\Omega$  hergeleitet.

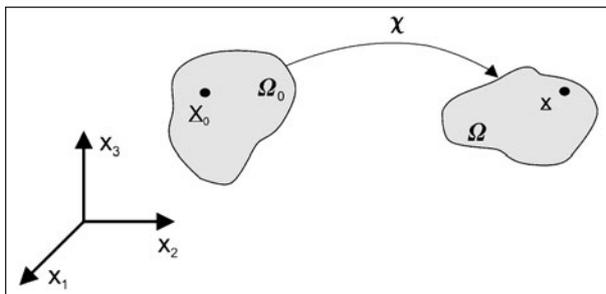


Bild 3-1: Konfigurationen  $\Omega_0$  und  $\Omega$  eines Kontinuums  $B$  im  $R^3$

Die Grundgleichungen der klassischen Mechanik verbinden äußere Kraftgrößen über ein Gleichgewicht mit den inneren Kraftgrößen (Spannungen). Diese werden unter Verwendung von Materialgesetzen zur Berechnung der inneren Weggrößen (Verzerrungen) verwendet, welche mit den äußeren Weggrößen über eine Kinematik verknüpft sind (Bild 3-2).

### 3.1.2 Deformationsgradient, seine Zerlegung und Jacobideterminante

Der Deformationsgradient bildet einen Vektor (Differenz zweier Punkte einer Konfiguration) einer Konfiguration auf einen Vektor einer anderen Konfiguration ab. Er beschreibt die Rotation und Dehnung die der Vektor beim Übergang von der einen zur anderen Konfiguration durchläuft. Der Deformationsgradient von der Initial- zur Momentankonfiguration wird in dieser Arbeit mit  $F$  bezeichnet (Bild 3-3).

Ein differentielles Linienelement  $d\underline{X}_0$  der Initialkonfiguration  $\Omega_0$  wird mit dem Deformationsgra-

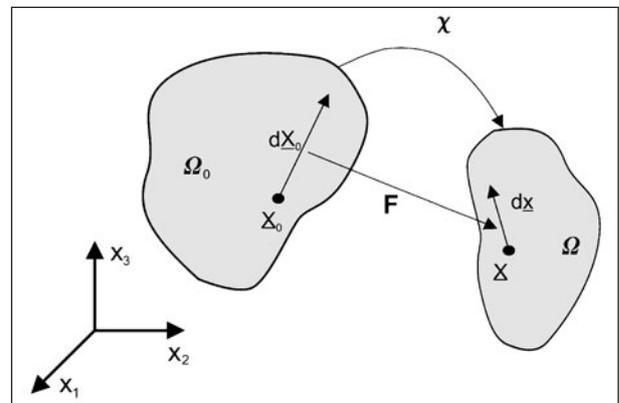


Bild 3-3: Deformation eines Vektors beim Übergang von  $\Omega_0$  zu  $\Omega$

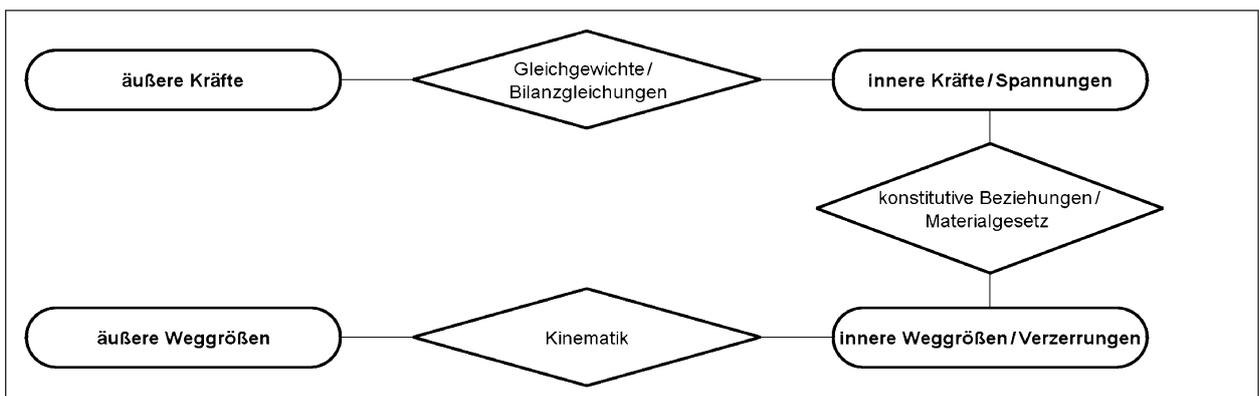


Bild 3-2: Größen und Grundgleichungen der klassischen Mechanik

dienten  $\underline{F}$  auf das differentielle Linienelement  $d\underline{x}$  der Momentankonfiguration  $\Omega$  abgebildet.

$$d\underline{x} = \underline{F} d\underline{X}_0 \quad (3-3)$$

Die differentielle Linienelemente können als Verbindung zweier Punkte in der jeweiligen Konfiguration aufgefasst werden. Die erfolgte Verschiebung der Punkte einer Konfiguration zueinander, die beim Übergang der Initialkonfiguration in die Momentankonfiguration auftritt, kann in jedem Punkt der Konfiguration variieren. Des Weiteren ist die Momentankonfiguration von der gewählten Betrachtungszeit  $t$  abhängig. Somit ist der Deformationsgradient

$$d\underline{x} = \underline{F}(\underline{X}_0, t) d\underline{X}_0 \quad (3-4)$$

abhängig vom betrachteten Punkt in der Initialkonfiguration und dem Zeitpunkt an dem die gewünschte Momentankonfiguration vorliegt. Die Betrachtung des Deformationsgradienten in einem Punkt

$$\underline{F}(\underline{X}_0, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}_0} = \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}_0, t)}{\partial \underline{X}_0} = \underline{\text{Grad}}_{\underline{x}}(\underline{X}_0, t) \quad (3-5)$$

führt zu einer Beschreibung, die den Anstieg im Ortsvektor  $\underline{x}$  abbildet und sich als Gradient von  $\underline{x}$  bezogen auf die Initialkonfiguration ausdrücken lässt. Der inverse Deformationsgradient

$$\underline{F}^{-1}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{X}_0}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{X}_0^{-1}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} = \underline{\text{grad}}_{\underline{X}_0}(\underline{x}, t) \quad (3-6)$$

ergibt sich zum Gradienten von  $\underline{X}_0$  bezogen auf die Momentankonfiguration.

Die dritte Invariante des Deformationsgradienten

$$III[\underline{F}(\underline{X}_0, t)] = \det \underline{F}(\underline{X}_0, t) = \underline{J}(\underline{X}_0, t) \quad (3-7)$$

ist die Jacobideterminante und beschreibt die Volumenänderung von der Initial- zur Momentankonfiguration. Demnach gilt  $J > 0$ , da das Volumen keine negativen Werte annehmen kann. Für  $J = 1$  bleibt das Volumen konstant.

Der Deformationstensor kann eindeutig in einen Rotationstensor und einen rechten Strecktensor

$$\underline{F} = \underline{R}\underline{U} \quad (3-8)$$

bzw. einen Rotationstensor und linken Strecktensor

$$\underline{F} = \underline{v}\underline{R} \quad (3-9)$$

zerlegt werden.

### 3.1.3 Verzerrungstensoren

Aus dem Deformationstensor lassen sich verschiedene Verzerrungstensoren ableiten, die nur die Verzerrung, ohne Starrkörperbewegung beinhalten.

Der rechte Cauchy-Green-Tensor ist als Produkt aus dem Deformationsgradienten und dem transponierten Deformationsgradienten definiert

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} = \underline{U}\underline{R}^T \underline{R}\underline{U} = \underline{U}^2 \quad (3-10)$$

im orthonormalen Basissystem definiert. Analog dazu ist der linke Cauchy-Green-Tensor zu

$$\underline{b} = \underline{F}\underline{F}^T = \underline{v}^2 \quad (3-11)$$

definiert.

Die Strecktensoren werden für eine reine Rotation zu Einheitstensoren, deren Determinante gleich drei ist. Demnach werden der Green-Lagrange-Verzerrungstensor

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{I}) \quad (3-12)$$

und der Euler-Almansi-Verzerrungstensor

$$\underline{e} = \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{I}) \quad (3-13)$$

eingeführt, deren dritte Invariante für die reine Rotation null ist.

### 3.1.4 Spannungstensoren und -vektoren

Spannungen sind zeit- und ortsabhängig. Sie können auf die Initial- oder die Momentankonfiguration bezogen werden.

Der Cauchy-Spannungstensor  $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$  stellt die realen Spannungen im deformierten Körper, d. h. die in den Schnittebenen der Momentankonfiguration auftretenden Spannungen, die in Abhängigkeit der Punkte der Momentankonfiguration und der Zeit definiert sind dar.

Der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$$\underline{P} = \underline{J}\underline{\sigma}\underline{F}^{-T} \quad (3-14)$$

bildet die in den Schnittebenen der Momentankonfiguration auftretenden Spannungen bezogen auf die Punkte der Initialkonfiguration und die Zeit ab.

Der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$$\underline{S} = \underline{J}\underline{F}^{-1}\underline{\sigma}\underline{F}^{-T} \quad (3-15)$$

bildet die in den in die Initialkonfiguration abgebildeten Schnittebenen der Momentankonfiguration auftretenden Spannungen bezogen auf die Punkte der Initialkonfiguration und die Zeit ab.

Der Cauchy-Spannungsvektor

$$\underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n}) = \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \underline{n} \quad (3-16)$$

gibt die wirkende Zugkraft pro der in der Momentankonfiguration beschriebenen Fläche in Richtung der Normalen der Schnittfläche des Körpers in der Momentankonfiguration an.

Der erste Piola-Kirchhoff-Spannungsvektor

$$\underline{T}(\underline{x}, t, \underline{N}) = \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \underline{N} \quad (3-17)$$

gibt die wirkende Zugkraft pro der in der Initialkonfiguration beschriebenen Fläche in Richtung der Normalen der Schnittfläche des Körpers in der Momentankonfiguration an.

### 3.1.5 Helmholtz'sche freie Energie und Entropie

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass die innere Energie

$$U = F + TS \quad (3-18)$$

eines Körpers sich aus der freien Energie  $F$  und dem Produkt aus Temperatur  $T$  und Entropie (dem Grad der Unordnung)  $S$  zusammensetzt. Die Helmholtz'sche freie Energie entspricht der in einem Körper in Form von Spannungen gespeicherten Energie und wird aus der Integration des Helmholtz'schen Energiefunktionals  $\Psi$  über den Körper

$$F(t) = \int_{\Omega_0} \Psi dV_0 \quad (3-19)$$

bestimmt. Die Entropie ist ein Maß für die Anzahl an möglichen Konfigurationen die ein System zu einem bestimmten Zeitpunkt einnehmen kann. Die Entropie eines geschlossenen Systems nimmt in positiver Zeitachsenrichtung nie ab und gibt damit diese an. Es wird deutlich, dass ein Minimum der inneren Energie nicht mit dem Minimum der freien Energie zusammenfallen muss, da bei höheren Temperaturen die Entropie einen großen Einfluss auf die innere Energie hat [MEHLHORN 1997].

## 3.2 Ableitungen

Bedingt durch die verschiedenen Konfigurationen eines Körpers im betrachteten Raum ist es notwendig auf die verschiedenen Möglichkeiten der Ableitung von Feldgrößen der einzelnen Konfigurationen einzugehen.

### 3.2.1 Zeitableitung bezogen auf die Initialkonfiguration

Es sei eine stetig nach der Zeit differenzierbare Funktion  $\iota$  gegeben.

Die auf die Initialkonfiguration bezogene Zeitableitung  $\frac{D}{Dt}$  der über die Initialkonfiguration definierten Funktion  $\iota = \zeta_0(\underline{X}_0, t)$  wird nur nach  $t$  abgeleitet, da  $\underline{X}_0$  zeitinvariant ist und ergibt sich zu

$$\frac{D\iota}{Dt} = \frac{\partial \zeta_0(\underline{X}_0, t)}{\partial t} = \iota_{\underline{X}_0}(t). \quad (3-20)$$

Die Änderung der Feldgröße im Punkt  $\underline{X}_0$  über die Zeit, also die partielle Ableitung nach  $t$ , wird somit ermittelt.

Die auf die Initialkonfiguration bezogene Zeitableitung

$$\frac{D\iota}{Dt} = \frac{\partial \zeta(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} + \frac{\partial \zeta(\underline{x}, t)}{\partial t} = \underline{v} \cdot \mathbf{grad} \iota + \frac{\partial \iota}{\partial t}. \quad (3-21)$$

der über die Momentankonfiguration definierten Funktion  $\iota = \zeta(\underline{x}, t)$  ergibt sich entsprechend der Kettenregel, da  $\underline{x}$  zeitabhängig ist. Es resultiert die Summe der Änderung der Feldgröße eines Partikels, die aus der Verschiebung des Partikels im Raum resultiert, und der Änderung der Feldgröße im Punkt  $\underline{x}$ , an dem sich der Partikel zum Zeitpunkt  $t$  befindet, über die Zeit [MEHLHORN 1997].

### 3.2.2 Reynolds'scher Transportsatz

Der Reynolds'sche Transportsatz

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \Phi dV &= \int_{\Omega} \left( \frac{D\Phi}{Dt} + \Phi \operatorname{div} \underline{v} \right) dV \\ &= \int_{\Omega} \left( \operatorname{div}(\Phi \underline{v}) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dV \\ &= \int_{\partial \Omega} \Phi \underline{v} \underline{n} dS + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dV \end{aligned} \quad (3-22)$$

ermöglicht das Bilden von Zeitableitungen bezogen auf die Initialkonfiguration von Integralen deren Körper selbst zeitabhängig ist [HOLZAPFEL 2000].

### 3.2.3 Lie Zeitableitung

Die Lie Zeitableitung  $L$

$$\mathcal{L}(t) = X \left( \frac{D}{Dt} X^{-1} t \right) \quad (3-23)$$

angewendet auf eine beliebige nach der Zeit differenzierbare Funktion  $t(x, t)$ , die in der Momentankonfiguration definiert ist, bildet diese zunächst in die Initialkonfiguration ab, wendet darauf die Zeitableitung bezogen auf die Initialkonfiguration an und bildet das Ergebnis zurück in die Momentankonfiguration ab [HOLZAPFEL 2000].

## 3.3 Bilanzgleichungen und Erhaltungssätze

Grundlage für mechanische Modelle sind Axiome bzw. physikalische Gesetze und Vereinfachungen. Die hier verwendeten Formulierungen der Kontinuumsmechanik basieren auf einem Modell das Masse, Energie sowie Raum voneinander trennt. Allen in dieser Arbeit verwendeten Bilanzgleichungen entsprechen der allgemeinen Form der Ungleichung

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} f(\underline{x}, t) dV \geq \int_{\partial\Omega} \Phi(\underline{x}, t, n) dS + \int_{\Omega} \Sigma(\underline{x}, t) dV, \quad (3-24)$$

wobei  $f$  tensorielle Größen und Zustände jedweder Art in der Momentankonfiguration,  $\Phi$  oberflächenbezogene und  $\Sigma$  volumenbezogene einwirkende Störungen des geschlossenen Systems darstellt. Gilt

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} f(\underline{x}, t) dV = \int_{\partial\Omega} \Phi(\underline{x}, t, n) dS + \int_{\Omega} \Sigma(\underline{x}, t) dV \quad (3-25)$$

spricht man von einem Erhaltungssatz. Zusammen mit der verallgemeinerten Form von Gleichung (3-16) und dem Gauß'schen Integralsatz kann

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(\underline{x}, t, n) dS = \int_{\partial\Omega} \Phi(\underline{x}, t) n dS = \int_{\Omega} \text{div} \Phi(\underline{x}, t) dV \quad (3-26)$$

hergeleitet werden. Unter Verwendung des Reynolds'schen Transportsatzes (Gleichung 3-22) kann weiterhin festgehalten werden, dass

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} f(\underline{x}, t) dV = \int_{\Omega} \frac{\partial f(\underline{x}, t)}{\partial t} + \text{div}(f(\underline{x}, t) \otimes \underline{v}) dV \quad (3-27)$$

gilt und sich die allgemeine Bilanzgleichung in der Form

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial f(\underline{x}, t)}{\partial t} + \text{div}(f(\underline{x}, t) \otimes \underline{v}) dV \\ & \geq \int_{\Omega} \text{div} \Phi(\underline{x}, t) dV + \int_{\Omega} \Sigma(\underline{x}, t) dV \end{aligned} \quad (3-28)$$

darstellen lässt, die für jedweden Teilkörper gilt und sich somit direkt in die lokale Form

$$\frac{\partial f(\underline{x}, t)}{\partial t} \geq \text{div}(\Phi(\underline{x}, t) - f(\underline{x}, t) \otimes \underline{v}) + \Sigma(\underline{x}, t) \quad (3-29)$$

überführen lässt. Für den allgemeinen Erhaltungssatz ergibt sich die lokale Form zu

$$\frac{\partial f(\underline{x}, t)}{\partial t} = \text{div}(\Psi(\underline{x}, t)) + \Sigma(\underline{x}, t) \quad (3-30)$$

[HOLZAPFEL 2000].

### 3.3.1 Massenerhalt

Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Probleme bewegen sich im Rahmen der klassischen Mechanik, demnach wird bei den beschriebenen Prozessen keine Masse terminiert oder generiert. Die in dieser Arbeit untersuchten geschlossenen Systeme werden nicht durch Massenzufluss bzw. -abfluss von/nach außen gestört. Die Zeitableitung der zeitinvarianten Masse, die als Integral der Dichte über das Volumen

$$m = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}_0) dV_0 = \int_{\Omega} \rho(\underline{x}, t) dV = \text{konst.} > 0 \quad (3-31)$$

angegeben werden kann, ist immer null

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho(\underline{x}, t) dV = 0 \quad (3-32)$$

Nach Umstellen der Gleichung (3-31)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}_0) dV_0 - \int_{\Omega} \rho(\underline{x}, t) dV \\ & = \int_{\Omega_0} [\rho_0(\underline{X}_0) - \rho(\underline{x}(\underline{X}_0, t))] J(\underline{X}_0, t) dV_0 = 0 \end{aligned} \quad (3-33)$$

kann die lokale Formulierung des Massenerhalts

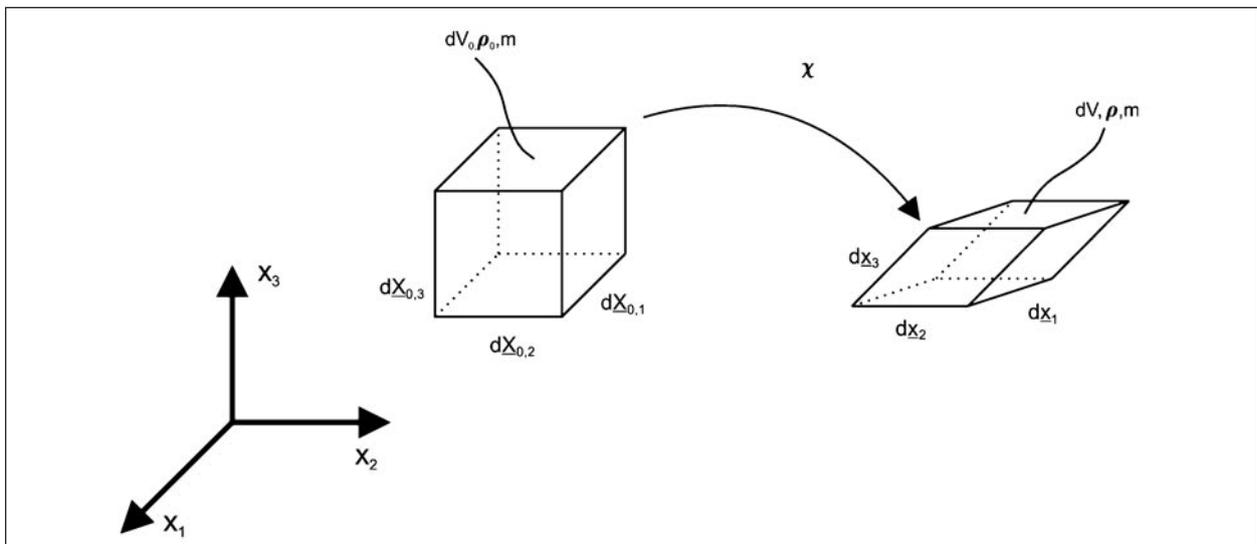


Bild 3-4: Infinitesimales Volumenelement

$$\rho_0(\underline{X}_0) = \rho(\underline{X}(\underline{X}_0, t), t) J(\underline{X}_0, t) \quad (3-34)$$

in Form einer Dichtebeziehung aufgestellt werden.

Ein infinitesimaler Würfel im  $\mathbb{R}^3$  kann somit im Laufe eines Deformationsprozesses sein Volumen verändern, seine Dichte ändert sich dabei jedoch stets so, dass seine Masse konstant bleibt (Bild 3-4).

### 3.3.2 Impulserhalt und Drehimpulserhalt

In der klassischen Mechanik leitet sich aus dem zweiten und dritten Newton'schen Gesetz für geschlossene Systeme der Impuls- bzw. Drehimpulserhaltungssatz ab. Nach dem dritten Newton'schen Gesetz ergibt sich die Summe aller Kräfte eines abgeschlossenen Systems zu null. Das zweite Newton'sche Gesetz, angewendet auf solch ein geschlossenes System, besagt, dass sich der Zustand des geschlossenen Systems nicht verändert, da Veränderungen in Richtung und proportional zu den einwirkenden Kräften erfolgt. Dieser Zusammenhang entspricht einer Verallgemeinerung des ersten Newton'schen Gesetzes von einzelnen Körpern auf geschlossene Systeme von Körpern. Diese Verallgemeinerung, dass ein geschlossenes System ohne das Einwirken von äußeren Kräften in Ruhe oder konstanter Translation verweilt, kann durch die Impulserhaltungssätze ausgedrückt werden [WI 01.06.2012; WI 25.05.2012].

Die Impulserhaltungssätze gelten unabhängig vom Energieerhaltungssatz. Für geschlossene Systeme sind nach Newton Impuls und Drehimpuls konstant

$$\underline{L} = \text{konst.} \quad \underline{J} = \text{konst.} \quad (3-35)$$

und somit ergeben sich deren Ableitungen nach der Zeit

$$\frac{D}{Dt} \underline{L} = \underline{0} \quad \frac{D}{Dt} \underline{J} = \underline{0} \quad (3-36)$$

zu Nullvektoren. Diese Formulierungen sind jedoch nicht geeignet, um Teile eines geschlossenen Systems zu untersuchen. Deshalb haben Cauchy- und Euler-Verallgemeinerungen für Newtons erstes und zweites Axiom hergeleitet, mit denen sich der Impulserhaltungssatz zu

$$\underline{L}(t) = \int_{\Omega} \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) dV = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}_0) \underline{v}_0(\underline{X}_0, t) dV_0 \quad (3-37)$$

ergibt. Dieser besagt, dass der Impuls  $\underline{L}(t)$  zu einem Zeitpunkt  $t$  einer Bewegung  $\underline{X}$  (Integral des Produkts von Dichte  $\rho$  und Geschwindigkeit  $\underline{v} = \frac{\partial \underline{X}(\underline{x}, t)}{\partial t}$  über den Körper  $\Omega$ ) im Bezug auf alle Konfigurationen eines Systems gleich ist. Der Drehimpulserhaltungssatz

$$\begin{aligned} \underline{J}(t) &= \int_{\Omega} \underline{r} \times \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) dV \\ &= \int_{\Omega_0} \underline{r} \times \rho_0(\underline{X}_0) \underline{v}_0(\underline{X}_0, t) dV_0 \end{aligned} \quad (3-38)$$

besagt, dass der Drehimpuls  $\underline{J}(t)$  zu einem Zeitpunkt  $t$  einer Bewegung  $\underline{X}$  (Integral des Kreuzproduktes eines beliebigen Vektors  $\underline{r}$  mit dem Produkt von Dichte  $\rho$  und Geschwindigkeit  $\underline{v} = \frac{\partial \underline{X}(\underline{x}, t)}{\partial t}$  über den Körper  $\Omega$ ) im Bezug auf alle Konfigurationen eines Systems gleich ist. Dies bedeutet, dass bei der Betrachtung von Teilsystemen sowohl Impuls

als auch Drehimpuls nur von der Zeit abhängen und das Bezugssystem, in dem ein Impuls oder Drehimpuls berechnet wird, keinen Einfluss auf das Ergebnis hat.

Die Zeitableitungen des Impulserhaltungssatzes

$$\begin{aligned}\underline{L}(t) &= \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) dV = \\ & \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}_0) \underline{v}_0(\underline{X}_0, t) dV_0 = \underline{F}(t)\end{aligned}\quad (3-39)$$

und des Drehimpulserhaltungssatzes

$$\begin{aligned}\underline{J}(t) &= \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \underline{r} \times \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) dV = \\ & \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} \underline{r} \times \rho_0(\underline{X}_0) \underline{v}_0(\underline{X}_0, t) dV_0 = \underline{M}(t)\end{aligned}\quad (3-40)$$

werden resultierende Kraft

$$\underline{F}(t) = \int_{\partial\Omega} \underline{t} dS + \int_{\Omega} \underline{b} dV \quad (3-41)$$

und resultierendes Moment

$$\underline{M}(t) = \int_{\partial\Omega} \underline{r} \times \underline{t} dS + \int_{\Omega} \underline{r} \times \underline{b} dV \quad (3-42)$$

genannt, die sich je aus einem Oberflächen- und einem Volumenanteil zusammensetzen. Das betrachtete Teilsystem kann als geschlossenes mechanisches System aufgefasst werden, welches durch  $\underline{F}(t)$  und  $\underline{M}(t)$  von außen gestört wird. Der Impulserhaltungssatz in der Momentankonfiguration

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) dV = \int_{\partial\Omega} \underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n}) dS + \int_{\Omega} \underline{b}(\underline{x}, t) dV \quad (3-43)$$

und der Drehimpulserhaltungssatz in der Momentankonfiguration

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \underline{r} \times \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) dV = \int_{\partial\Omega} \underline{r} \times \underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n}) dS + \int_{\Omega} \underline{r} \times \underline{b}(\underline{x}, t) dV \quad (3-44)$$

können aufgestellt werden. Der Einsatz der Gleichung (3-16) und des Gauß'schen Integralsatzes formt den Impulserhaltungssatz in die erste Cauchy'sche Bewegungsgleichung

$$\int_{\Omega} \left( \operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{b} - \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \right) dV = 0, \quad (3-45)$$

die für jedes beliebige Volumen gilt und somit auch als Lokalform für einen Punkt

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \underline{b} - \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0 \quad (3-46)$$

aufgestellt werden kann. Die auch in Bezug auf die Initialkonfiguration

$$\operatorname{div} P + \underline{B} - \rho_0 \frac{\partial \underline{v}_0}{\partial t} = 0 \quad (3-47)$$

aufgestellt werden kann [HOLZAPFEL 2000].

### 3.3.3 Erhaltungssatz der mechanischen Energie

Diese Arbeit beschränkt sich auf die Betrachtung der mechanischen Energie. Der Erhaltungssatz der mechanischen Energie besagt, dass die Gesamtenergie eines geschlossenen Systems sich aus kinetischer Energie  $K$ , innerer potenzieller Energie  $\Pi_{\text{int}}$  und äußerer potenzieller Energie  $\Pi_{\text{ext}}$  zusammensetzt

$$K(t) + \Pi_{\text{int}}(t) + \Pi_{\text{ext}}(t) = \text{konst.} \geq 0 \quad (3-48)$$

und konstant größer-gleich null ist. Die innere potenzielle Energie  $\Pi_{\text{int}}$

$$\Pi_{\text{int}}(t) = \mathcal{F}(t) = \int_{\Omega_0} \psi dV_0 \quad (3-49)$$

entspricht der freien Helmholtzenergie  $\mathcal{F}$ . Die kinetische Energie

$$K(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \underline{v} \underline{v} dV = \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 \underline{v}_0 \underline{v}_0 dV_0 \quad (3-50)$$

wird aus dem Integral des Produktes aus der halben Momentandichte und des Skalarprodukts der Momentangeschwindigkeit mit sich selbst über das Volumen des Körpers in der Momentankonfiguration gebildet. Die erste Zeitableitung bezogen auf die Initialkonfiguration der kinetischen Energie kann aus der Gleichung (3-48) zu

$$\frac{D}{Dt} K(t) + \frac{D}{Dt} \mathcal{F}(t) = - \frac{D}{Dt} \Pi_{\text{ext}}(t) \quad (3-51)$$

ermittelt werden, wobei die Änderung der potenziellen Energien auch als Leistung aufgefasst werden kann. Die Leistung der äußeren Kräfte

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{ext}}(t) &= \int_{\partial\Omega} \underline{t} \underline{v} dS + \int_{\Omega} \underline{b} \underline{v} dV = \\ & \int_{\partial\Omega_0} \underline{T} \underline{v}_0 dS_0 + \int_{\Omega} \underline{B} \underline{v}_0 dV_0 = - \frac{D}{Dt} \Pi_{\text{ext}}(t)\end{aligned}\quad (3-52)$$

setzt sich aus einem Anteil infolge auf die Oberfläche wirkenden Kraftvektoren und aus einem Anteil infolge auf das Volumen wirkender Spannungstensoren zusammen, die Arbeit am System verrichten und somit die äußere potenzielle Energie verändern. Die Leistung der inneren Kräfte

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(t) = \int_{\Omega} \sigma : \underline{d} \, dV = \int_{\Omega_0} \underline{P} : \frac{D\underline{F}}{Dt} \, dV_0 = \frac{D}{Dt} \mathcal{F}(t) \quad (3-53)$$

wird mit Bezug auf die Momentankonfiguration aus dem Volumenintegral über dem Skalarprodukt aus Cauchy-Spannungstensor und Deformationsrate gebildet. Bezogen auf die Initialkonfiguration wird die Leistung der inneren Kräfte aus dem Volumenintegral über dem Skalarprodukt des ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors mit der auf die Initialkonfiguration bezogenen Zeitableitung des Deformationstensors gebildet. Somit lässt sich der mechanische Energieerhaltungssatz

$$\frac{D}{Dt} K + \mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{ext}} \quad (3-54)$$

mit Bezug auf die Referenzkonfiguration

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \underline{v} \underline{v} \, dV + \int_{\Omega} \sigma : \underline{d} \, dV = \int_{\partial\Omega} \underline{t} \underline{v} \, dS + \int_{\Omega} \underline{b} \underline{v} \, dV \quad (3-55)$$

und mit Bezug auf die Initialkonfiguration

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 \underline{v}_0 \underline{v}_0 \, dV_0 + \int_{\Omega_0} \underline{P} : \frac{D\underline{F}}{Dt} \, dV_0 = \int_{\partial\Omega_0} \underline{T} \underline{v}_0 \, dS_0 + \int_{\Omega_0} \underline{B} \underline{v}_0 \, dV_0 \quad (3-56)$$

darstellen [HOLZAPFEL 2000].

### 3.3.4 Energieerhaltung der mechanischen und thermischen Energie

Der thermomechanische Energieerhaltungssatz postuliert die Existenz der Gesamtenergie

$$\mathcal{E} := \int_{\Omega} \rho(\underline{x}, t) e(\underline{x}, t) \, dV \quad (3-57)$$

eines Systems, die sich aus dem Integral des Produkts aus Momentandichte und einer Energiedichtefunktion  $e$  über das Momentanvolumen ergibt. Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie eines Systems

$$\frac{D}{Dt} \mathcal{E}(t) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(t) + Q(t) \quad (3-58)$$

ergibt sich aus der Summe der Leistung der äußeren Kräfte  $\mathcal{P}_{\text{ext}}$  (Gleichung 3-52) und der dem System zugeführten Wärme

$$Q(t) = \int_{\partial\Omega} Q_n \, dS + \int_{\Omega} R \, dV = \int_{\partial\Omega_0} Q_{n,0} \, dS_0 + \int_{\Omega_0} R_0 \, dV_0 \quad (3-59)$$

die sich aus einem Anteil aus Wärmezufluss  $Q_n$  über die Körperoberfläche und Wärmequelle  $R$  im Körper zusammensetzt. Aus dem nach außen

gerichteten Normalenvektor der Körperoberfläche ergeben sich die Umformungen

$$Q_n(\underline{x}, t, \underline{n}) = -Q(\underline{x}, t) \underline{n} \quad (3-60)$$

$$Q_{n,0}(\underline{X}_0, t, \underline{N}) = -Q_0(\underline{X}_0, t) \underline{N} \quad (3-61)$$

der nach innen gerichteten Wärmezuflussanteile. Unter Verwendung des Gauß'schen Integralsatzes ergibt sich die dem System zugeführte Wärme

$$Q(t) = \int_{\Omega} -\text{div} Q + R \, dV = \int_{\Omega_0} -\text{Div} Q_0 + R_0 \, dV_0 \quad (3-62)$$

zum Integral der Differenz von Wärmequelle und Divergenz des Wärmezufusses über das Volumen.

Die Gesamtenergie

$$\mathcal{E}(t) = K(t) + U(t) = K(t) + F(t) + T(t)S(t) \quad (3-63)$$

setzt sich aus der kinetischen Energie  $K$  und der inneren Energie  $U$

$$U = \mathcal{E} - K \quad (3-64)$$

$$U(t) = \int_{\Omega} u(\underline{x}, t) \, dV, \quad (3-65)$$

die sich wiederum in die freien Helmholtzenergie  $F$  sowie dem Produkt aus Temperatur  $T$  und Entropie  $S$  aufspalten lässt, zusammen. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} U &= \frac{D}{Dt} \mathcal{E} - \frac{D}{Dt} K = (\mathcal{P}_{\text{ext}}(t) + Q(t)) - (\mathcal{P}_{\text{ext}}(t) - \mathcal{P}_{\text{int}}(t)) \\ &= Q(t) + \mathcal{P}_{\text{int}}(t) \end{aligned} \quad (3-66)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} u(\underline{x}, t) \, dV = \int_{\Omega} \sigma : \underline{d} - \text{div} Q + R \, dV \quad (3-67)$$

trifft Aussagen über die Änderung der inneren Energie  $U$  und besagt, dass diese sich aus der dem System zugeführten Wärme  $Q$  und der Leistung der inneren Kräfte  $\mathcal{P}_{\text{int}}$  zusammensetzt. Mit den Gleichungen 3-58 und 3-59

$$\frac{D}{Dt} \mathcal{E}(t) = \frac{D}{Dt} K(t) + \frac{D}{Dt} U(t) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(t) + Q(t) \quad (3-68)$$

lässt sich die Summe der zeitlichen Ableitungen der kinetischen und inneren Energie aufstellen. Mit den Gleichungen (3-50), (3-52), (3-62), (3-65) sowie beidseitiger Subtraktion der Änderung der kinetischen Energie lässt sich die thermomechanische Energiebilanz

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \underline{v} \underline{v} + u \, dV = \int_{\partial\Omega} \underline{t} \underline{v} + Q_n \, dS + \int_{\Omega} \underline{b} \underline{v} + R \, dV \quad (3-69)$$

bezogen auf die Momentankonfiguration aufstellen.

Der erste Satz der Thermodynamik weist keine Restriktionen bezüglich der Richtung eines Prozesses auf. Demnach ist es nach dem ersten Satz der Thermodynamik möglich, dass Wärme von einem kälteren auf einen wärmeren Körper übergeht.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik legt die Richtung eines thermomechanischen Prozesses fest.

Die Entropie  $S$  ist als Integral der Entropie je Einheitsvolumen  $\eta$  über das Volumen

$$S(t) = \int_{\Omega} \eta(\underline{x}, t) dV \quad (3-70)$$

beschrieben. Die Zeitableitung der Entropie

$$\frac{D}{Dt} S(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \eta dV = \int_{\Omega} \frac{R}{T} dV - \int_{\partial\Omega} \frac{Q\eta}{T} dS + \int_{\Omega} s dV \quad (3-71)$$

setzt sich aus der Entropiezufuhr  $\int_{\Omega} \frac{R}{T} dV$  infolge innerer Wärmequellen  $R$ , Entropiezufuhr  $-\int_{\partial\Omega} \frac{Q\eta}{T} dS$  infolge Wärmezufuhr über die Oberfläche  $Q\eta$  und der Entropieproduktion im Inneren  $\int_{\Omega} s dV$  zusammen. Die Variable  $T$  steht für die absolute Temperatur. Mittels des Gauß'schen Integralsatzes

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{R}{T} - \operatorname{div} \frac{Q}{T} + s \quad (3-72)$$

kann die lokale Darstellung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik hergeleitet werden. Die Entropieproduktion im Inneren ist per Postulat

$$s \geq 0. \quad (3-73)$$

Wäre dies nicht der Fall, könnte sich die Luft in einem geschlossenen Raum ohne äußere Einwirkung auf nur die Hälfte des Raumes verteilen und die andere Hälfte mit einem Vakuum zurücklassen ohne dass ein Widerspruch auftritt. Die Vermeidung solcher nicht in der Realität auftretenden selbstsortierenden Prozesse erfordert eine nicht negative Entropieproduktion im Inneren. Somit lässt sich mit den Gleichungen (3-71) und (3-73) die Clausius-Duhem-Ungleichung

$$\Gamma(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \eta dV - \int_{\Omega} \frac{R}{T} dV + \int_{\partial\Omega} \frac{Q\eta}{T} dS \geq 0 \quad (3-74)$$

als Darstellung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik herleiten, wobei  $\Gamma$  die Gesamtentropieproduktion pro Zeiteinheit darstellt. Anhand Gleichung (3-63) kann die Zeitableitung der inneren Energie

aufgestellt und zusammen mit Gleichung (3-67) in die Clausius-Duhem-Ungleichung eingesetzt werden

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} u dV = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \Psi dV + \frac{DT}{Dt} \int_{\Omega} \eta dV + T \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \eta dV \quad (3-75)$$

die unter Verwendung des Gauß'schen Integralsatzes sowie der Gleichung (3-67) vereinfacht

$$\Gamma(t) = \frac{1}{T} \left( \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} u dV - \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \Psi dV - \frac{DT}{Dt} \int_{\Omega} \eta dV \right) - \int_{\Omega} \frac{R}{T} dV + \int_{\partial\Omega} \frac{Q\eta}{T} dS \geq 0, \quad (3-76)$$

die unter Verwendung des Gauß'schen Integralsatzes sowie der Gleichung (3-67) vereinfacht

$$\Gamma(t) = \int_{\Omega} \sigma : d dV - \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \Psi dV - \frac{DT}{Dt} \int_{\Omega} \eta dV - \int_{\Omega} \frac{1}{T} Q \operatorname{grad} T dV \geq 0 \quad (3-77)$$

$$\Gamma(t) = \int_{\Omega} -\frac{1}{J} \frac{D\Psi}{Dt} - \frac{DT}{Dt} \frac{\eta}{J} + \sigma : d - \frac{1}{T} Q \operatorname{grad} T dV \geq 0 \quad (3-78)$$

für jedes beliebige Volumen dargestellt werden kann. Demnach ergibt sich die lokale Form

$$-\frac{D\Psi}{Dt} - \frac{DT}{Dt} \eta + J\sigma : d - J \frac{1}{T} Q \operatorname{grad} T \geq 0 \quad (3-79)$$

des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, wobei  $D_{int}$  das volumenbezogene Funktional der intern dissipierten Energie darstellt [HOLZAPFEL 2000; MEHLHORN 1997].

### 3.4 Hyperelastisches Materialmodell

Das Materialgesetz als Verknüpfung von inneren Kraftgrößen (Spannungen) und inneren Weggrößen (Verzerrungen) ist maßgebender Bestandteil jedweder Modellierung von Tragwerken. Materialverhalten kann mithilfe von rheologischen Modellen beschrieben werden. Diese bestehen aus einzelnen Elementen (die gebräuchlichsten sind Federn und Dämpfer), deren Verhalten über Materialgesetze definiert ist. In diesem Kapitel werden die in der Arbeit verwendeten Materialgesetze für die Federelemente eingeführt.

Die Helmholtz'sche Freie Energie wird als Grundlage für die Formulierung von elastischen und hyperelastischen Materialgesetzen genutzt, deren innere Spannungen nur von den Verzerrungen und nicht

von der Belastungsdauer sowie der Belastungsgeschwindigkeit abhängen. Die Federelemente werden idealelastisch modelliert, d. h. die Prozesse die sie durchlaufen sind reversibel und produzieren lokal keine Entropie  $\eta$ . Somit ergibt sich für ideal-elastische Materialmodelle die lokale Form des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik

$$D_{\text{int}} = -\frac{D\Psi}{Dt} + J\sigma : d = P : \frac{DF}{Dt} - \frac{D\Psi}{Dt} = 0 \quad (3-80)$$

in der lokalen Form.

### 3.4.1 Odgen-Materialgesetz inkompressibler Materialien

Der isochore Anteil der Deformation eines Körpers hat einen volumetrischen Anteil von null, d. h. für die Jakobideterminante des isochoren (volumenerhaltenden) Anteils gilt  $\bar{J} = \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdot \bar{\lambda}_3 = 1$ . Liegt eine isochore Deformation vor, kann das Materialgesetz für diesen Körper mit einem freien Helmholtz-Energiefunktional

$$\Psi_{\text{iso}}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left( \bar{\lambda}_1^{-\alpha_p} + \bar{\lambda}_2^{-\alpha_p} + \bar{\lambda}_3^{-\alpha_p} - 3 \right) \quad (3-81)$$

aufgestellt werden, das nur von den isochoren Hauptdehnungen  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$ , den dimensionslosen konstanten Parametern  $\alpha_p$  und konstanten Schubmoduln  $\mu_p$  abhängt. Aus dem Vergleich mit der linear elastischen Theorie kann abgeleitet werden, dass die Summe der Produkte aus den dimensionslosen konstanten Parametern  $\alpha_p$  und konstanten Schubmoduln  $\mu_p$  gleich dem doppelten Schubmodul  $\mu$

$$2\mu = \sum_{p=1}^N \alpha_p \mu_p \quad (3-82)$$

aus der linearen Theorie in der Referenzkonfiguration entspricht. Basierend auf dem Odgen-Materialgesetz können verschiedene häufig verwendete hyperelastische Materialgesetze aufgestellt werden, die alle ein konstantes Schubmodul aufweisen [HOLZAPFEL 2000].

### 3.4.2 Mooney-Rivlin-Materialgesetz inkompressibler Materialien

Für die Parameter  $N = 2$ ,  $\alpha_1 = -2$  und  $\alpha_2 = -2$  formt das Odgen-Materialgesetz das von MOONEY (1940) aufgestellte Materialgesetz

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{iso}}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) &= \\ c_1(\bar{\lambda}_1^{-2} + \bar{\lambda}_2^{-2} + \bar{\lambda}_3^{-2} - 3) &+ c_2(\bar{\lambda}_1^{-2} + \bar{\lambda}_2^{-2} + \bar{\lambda}_3^{-2} - 3) \\ &= c_1(I[\bar{\mathbf{b}}] - 3) + c_2(II[\bar{\mathbf{b}}] - 3) \end{aligned} \quad (3-83)$$

in der Invariantendarstellung nach Rivlin [HOLZAPFEL 2000].

MOONEY [MOONEY 1940] hat dieses für isotropes Material, dessen Volumendehnung null und dessen Scherung proportional zu den Schubspannungen ist, hergeleitet, indem er aus der Isotropieannahme Symmetrieeigenschaften für die isochoren Hauptdehnungen  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$  folgerte und die Zwangsbedingung  $\Psi_{\text{iso}}(1) = 0$  der Nullspannung für den unverformten Zustand eines Körpers ausnutzte. Somit beschreibt dieses Materialgesetz ein isotropes, volumendehnungsfreies Material mit konstantem Scherungs-Schubspannungsverhältnis exakt. Aus den Gleichungen (3-83) und (3-82) kann das Schubmodul des Materials

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 = 2(c_1 + c_2) = 2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial I[\bar{\mathbf{b}}]} + \frac{\partial\Psi}{\partial II[\bar{\mathbf{b}}]}\right) = \text{konst.} > 0 \quad (3-84)$$

bei Verwendung des Mooney-Rivlin-Materialgesetzes aufgestellt werden [HOLZAPFEL 2000].

### 3.4.3 Neo-Hooke'sches Gesetz inkompressibler Materialien

Für die Parameter  $N = 1$  und  $\alpha_1 = 2$  ergibt sich aus dem allgemeinen Odgen-Materialgesetz für inkompressible Materialien (Gleichung (3-81)) das freie Helmholtz'sche Energiefunktional

$$\Psi_{\text{iso}}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) = c_1(\bar{\lambda}_1^{-2} + \bar{\lambda}_2^{-2} + \bar{\lambda}_3^{-2} - 3) = c_1(I[\bar{\mathbf{b}}] - 3) \quad (3-85)$$

für das Neo-Hooke'sche-Materialgesetz, wobei nach Gleichung (3-82) die Materialkonstante  $c_1$  gleich dem halben Schubmodul  $\mu$  ist. Das Neo-Hooke'sche-Materialgesetz ist vor allem für die Modellierung von Körpern, die aus gummiartigen Materialien bestehen und deren Deformation den Bedingungen der kleinen Dehnungen entsprechen, geeignet. Es ist nicht in der Lage, Prüfergebnisse von Versuchen an isotropen, inkompressiblen Materialien, bei denen große Dehnungen aufgebracht werden, realitätsnah abzubilden. Somit ist ein Ansatz nach MOONEY zu erwägen [HOLZAPFEL 2000].

### 3.4.4 Verzerrungstensoren hyperelastischen Materials

Aus Gleichung (3-80) kann für ein ideal elastisches Material

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \frac{D\mathbf{F}}{Dt} dV_0 = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} \Psi(\mathbf{F}) dV_0$$

$$\longrightarrow \mathbf{P} : \frac{D\mathbf{F}}{Dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} : \frac{D\mathbf{F}}{Dt} \longrightarrow \mathbf{P} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \quad (3-86)$$

der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor direkt aus der partiellen Ableitung des Helmholtz'schen Energiefunktionals nach dem Deformationsgradienten gewonnen werden. Unter Zuhilfenahme der Darstellung der auf die Initialkonfiguration bezogenen Zeitableitung des Helmholtz'schen Energiefunktionals

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \text{tr} \left[ \left( \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right] = \text{tr} \left[ \left( \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right) \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \right]$$

$$= 2 \text{tr} \left[ \left( \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right] \quad (3-87)$$

lässt sich der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor für ideal elastisches Material in Abhängigkeit vom Deformationsgradienten und der Ableitung des Helmholtzfunktionals nach dem rechten Cauchy-Green-Verzerrungstensor

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (3-88)$$

darstellen. Mit den Gleichungen (3-12) und (3-15) lässt sich der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor für ideal elastisches Material

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (3-89)$$

in Bezug auf die Ableitung des Helmholtzfunktionals nach dem rechten Cauchy-Green-Verzerrungstensor bzw. nach dem Green-Lagrange-Verzerrungstensor darstellen.

### 3.5 Linearisierung und Lösungsverfahren

Die geschlossenen Lösungen für die Differentialgleichungssysteme, die die zu untersuchenden Probleme beschreiben, sind nur für wenige Probleme bekannt oder existent. Der Einsatz von numerischen Lösungsmethoden erfordert die Linearisierung der Differentialgleichungssysteme, da nur line-

are Gleichungen numerisch gelöst werden können. Die Qualität einer numerischen Lösung ist somit von der Qualität der Linearisierung der aufgestellten Differentialgleichungssysteme ebenso abhängig wie von der Qualität der das Problem beschreibenden Differentialgleichungssysteme selbst.

#### 3.5.1 Linearisierung

Nichtlineare Funktionen können in einzelnen Punkten mit ihrer Tangente bzw. den ersten zwei Gliedern der Taylorreihe des jeweiligen Punktes approximiert werden. Bei der Linearisierung einer beliebigen stetig differenzierbaren Funktion  $G(x)$  erschließt man sich ausgehend von einem für ein Argument  $a$  bekannten Funktionswert  $G(a)$  einen für das Argument  $a+u$  unbekanntem Funktionswert

$$G(a+u) = G(a) + \frac{\partial G(a)}{\partial x} u + R \quad \lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{R}{|u|} \rightarrow 0 \quad (3-90)$$

aus der Summe aus dem bekannten Funktionswert  $G(a)$ , dem Produkt aus der Richtungsableitung im Punkt  $a$  und der Schrittweite  $u$  sowie einem Restterm  $R$ , der für kleine  $u$  gegen null geht. Die Formulierung mittels der totalen Differentiale

$$g(a+u) = g(a) + \frac{dg(a)}{dx} u \quad (3-91)$$

stellt dann die linearisierte Form (die Tangente) der Funktion  $G(x)$  im Punkt  $a$  dar [HUGHES 1978] (Bild 3-5).

#### 3.5.2 Elastizitätstensoren

Die die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen beschreibenden Größen sind über Differentialgleichungen miteinander verknüpft. Die Linearisierung dieser Zusammenhänge erfordert die Einführung des Elastizitätstensors

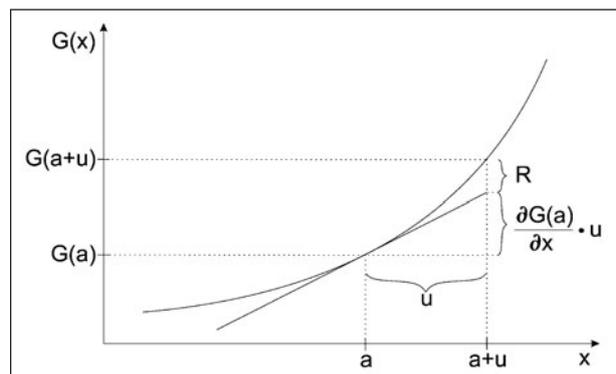


Bild 3-5: Linearisierung

$$\overset{(4)}{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}, \quad (3-92)$$

der als Tensor vierter Stufe die partielle Ableitung des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors nach dem Green-Lagrange-Verzerrungstensor darstellt. Für hyperelastische Materialgesetze kann das Helmholtz'sche Energiefunktional entsprechend Gleichung (3-89) eingesetzt werden

$$\overset{(4)}{\mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (3-93)$$

und der Elastizitätstensor in Abhängigkeit des Helmholtz'schen Energiefunktionals und des rechten Cauchy-Green-Verzerrungstensors aufgestellt werden. Entsprechend der Vorgehensweise der Linearisierung

$$\mathbf{D} + d\mathbf{S} = \mathbf{S} + \overset{(4)}{\mathbf{C}} : (d\mathbf{E} + \mathbf{I}) = \mathbf{S} + \overset{(4)}{\mathbf{C}} : \frac{1}{2} d\mathbf{C} \quad (3-94)$$

kann nun die Änderung der Spannung in Abhängigkeit der Änderung der Verzerrung approximiert werden. Entsprechend den Materialformulierungen kann der Elastizitätstensor in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil

$$\overset{(4)}{\mathbf{C}} = \overset{(4)}{\mathbf{C}}_{\text{iso}} + \overset{(4)}{\mathbf{C}}_{\text{vol}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{C}} \quad (3-95)$$

zerlegt werden.

### 3.5.3 Newton-Raphson

Bedingt durch den Aufbau der aufgestellten Gleichungen ist es möglich, jeder Deformation eines mit den finiten Elementen modellierten Systems eine resultierende Kraft zu berechnen. Die meisten Probleme der Ingenieurpraxis erfordern jedoch die resultierende Deformation infolge eingetragener äußerer Lasten. Das Newton-Raphson-Näherungsverfahren zum Lösen nichtlinearer Gleichungen ermöglicht dies für einen Großteil der Anwendungsprobleme. Anwendbar ist das Newton-Raphson-Verfahren für mindestens abschnittsweise stetig differenzierbare Funktionen.

Das Verfahren beginnt stets an einem bekannten Gleichgewichtszustand, der in der Regel der undeformierte, spannungsfreie Zustand zum Zeitpunkt  $t_0$  ist. In diesem Punkt wird der Elastizitätstensor als lineare Näherung der Spannungs-Verzerrung-Funktion in diesem Punkt bestimmt. Es wird die der linearen Näherung entsprechende, zur aufgebrachten Kraft zugehörige, Verzerrung bestimmt. Die ermit-

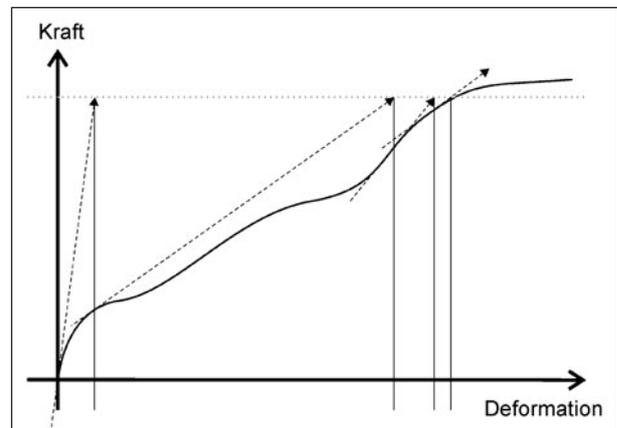


Bild 3-6: Newton-Raphson-Verfahren

telte, linear angenäherte Verzerrung wird nun genutzt, um die dem Materialgesetz entsprechende resultierende Kraft zu bestimmen. Ein neuer Gleichgewichtszustand ist somit ermittelt, der als Ausgangspunkt für einen erneuten Durchlauf des Algorithmus' dient (Bild 3-6).

Der Algorithmus wird so lange wiederholt bis ein zu definierendes Abbruchkriterium erfüllt ist.

Dieses Abbruchkriterium kann durch einen Vergleich der aufgebrachten Spannung mit der der ermittelten Deformation zugehörigen Spannung oder einen Vergleich der in zwei aufeinanderfolgenden Iterationen ermittelten Verzerrungen definiert werden.

### 3.5.4 Ablauf einer nichtlinearen Berechnung mit der Methode der finiten Elemente

In Bild 3-7 ist der Ablauf einer nichtlinearen Berechnung mit der Methode der finiten Elemente dargestellt.

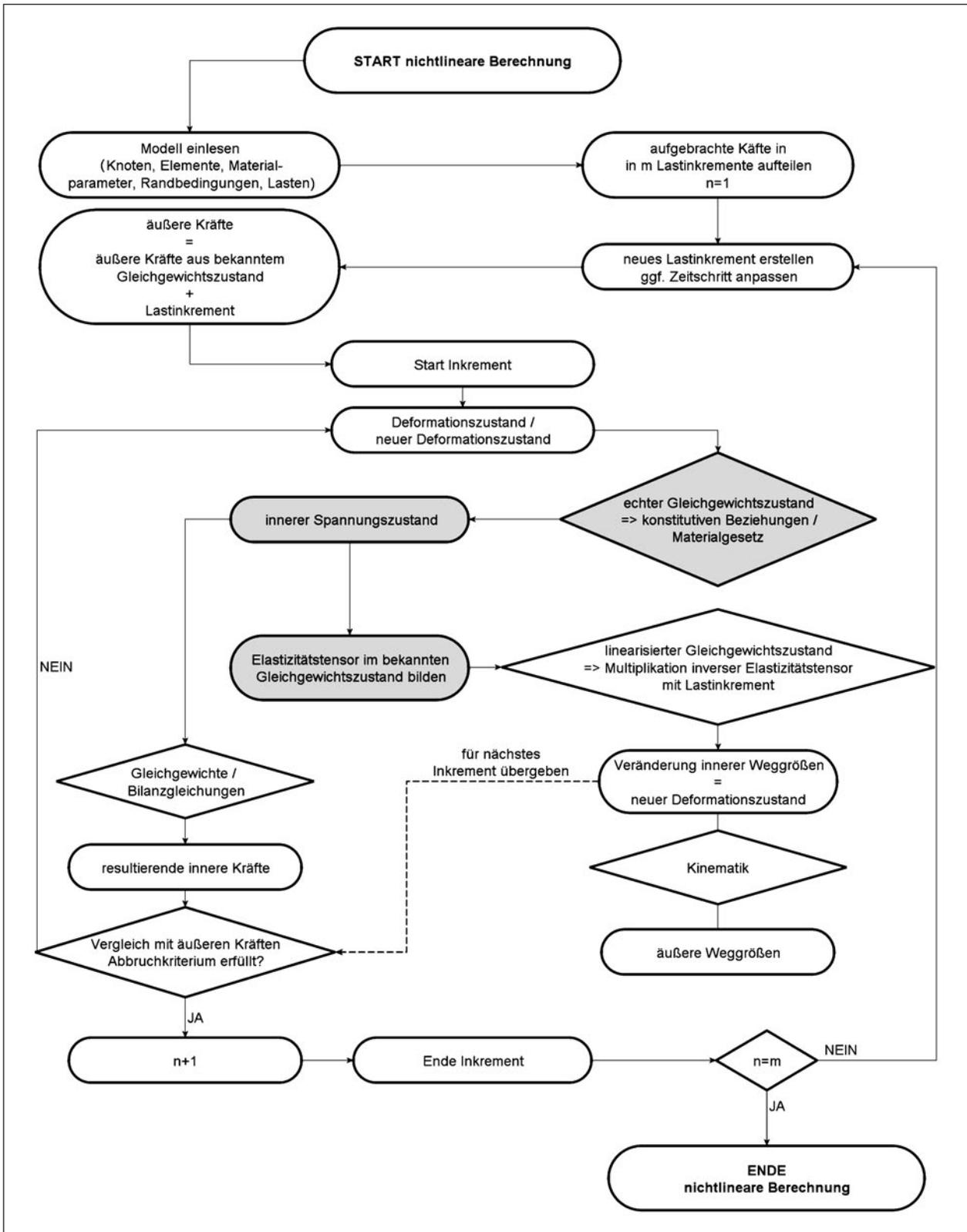


Bild 3-7: Ablauf nichtlineare FEM-Berechnung

## 4 Modellbildung für FEM-Berechnungen

Das Berechnungsmodell besteht aus einem System mathematischer Gleichungen, Algorithmen, Konstanten und Parameterwerten, welche das Problem hinreichend detailliert beschreiben. Das Modell (Bild 4-1) ist vor der eigentlichen Berechnung zu konzipieren und mithilfe geeigneter Softwareinstrumente für das FEM-System (Bild 4-1) aufzubereiten. Um ein FEM-System für den normalen Anwender in der Dimensionierungspraxis nutzbar zu machen, ist das Modell soweit wie möglich zu vereinfachen und zu parametrisieren. Die Eingabe ist so zu vereinfachen, dass der Nutzer nur noch Parameter eingeben muss, welche dem normalen Anwender vertraut sind.

### 4.1 Geometrie

Die Geometrie des zu berechnenden Bauteiles wird in der FEM durch eine Vielzahl begrenzter (finiter) Elemente beschrieben. Jedes Element wird durch eine bestimmte Anzahl von Knoten definiert, welche in einer vorgegebenen Reihenfolge verbunden werden. Durch die Angabe der Knotenkoordinaten werden somit Form, Größe und Ort der Elemente und damit die Geometrie des Bauteiles modelliert. Dabei finden ein-, zwei- und dreidimensionale Elemente Anwendung. Unter Verwendung weniger Elementformen ist es damit prinzipiell möglich, nahezu jede Bauteilgeometrie mit beliebiger Genauigkeit zu modellieren. Gebräuchliche geometrische Formen für die finiten Elemente sind Stab, Dreieckfläche, Viereckfläche, Tetraeder und Quader.

FE Modell	FE Software
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Geometrie</li> <li>• Materialgesetze</li> <li>• Lasten</li> <li>• Auflagerbedingungen</li> <li>• Kontaktbedingungen</li> <li>• Elemente, Vernetzung</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• dient der Erstellung des digitalen Modells</li> <li>• stellt das Modell abbildende Gleichungssystem auf</li> <li>• löst das Gleichungssystem</li> <li>• stellt Ergebnisse dar bzw. verarbeitet sie weiter</li> </ul>

Bild 4-1: Finite-Elemente-Modell und Finite-Elemente-Software

Sind Bauteile abzubilden, welche in irgendeiner Richtung keine definierte Begrenzung haben (z. B. Tragschichten), so wird es notwendig, eine Modellbegrenzung so zu bestimmen, dass das Berechnungsmodell hinreichend realitätsnah bleibt. Diese Aufgabe ist durch systematische Untersuchungen zu bewältigen und kann nicht dem Anwender überlassen werden.

### 4.2 Vernetzung

Die Vernetzung bzw. Elementierung stellt die Aufteilung des geometrischen Modellkörpers in die finiten Elemente dar. Die Elemente werden mit Knotenpunkten definiert und sind untereinander über gemeinsame Knoten verbunden. An diesen Knotenpunkten werden die Kräfte übertragen und die Verträglichkeitsbedingungen definiert. Die Kraftübertragung innerhalb der Elemente wird mit relativ einfachen funktionalen Ansätzen (meist linear oder quadratisch) annähernd beschrieben. Das bedeutet, dass die Genauigkeit der Berechnungen grundsätzlich mit einer feineren Vernetzung ansteigt. Andererseits ist es im Interesse einer kurzen Rechenzeit notwendig, die Anzahl der Elemente auf ein erforderliches Mindestmaß zu beschränken. Oft ist es sinnvoll, bestimmte Bereiche feiner zu vernetzen als das übrige Modell.

Bei der Elementierung ist sicher zu stellen, dass verschiedene auf den Elementtyp bezogene Restriktionen eingehalten werden (z. B. Einhaltung bestimmter Seitenlängenverhältnisse), da sonst ungewünschte Versteifungseffekte (Locking) vermehrt auftreten können.

Im Zuge der Elementierung bekommen jedes Element und seine Bestandteile (Nodes, Edges, Faces) einen bestimmten Identifikator (ID). Um die Position dieser Elemente im Modell später über die ID einfach zuordnen zu können, ist es zweckmäßig, bei der Elementierung eine bestimmte Systematik zu verfolgen.

Durch die Vernetzung wird das Berechnungsergebnis entscheidend beeinflusst. Es ist deshalb notwendig, für die Berechnung der Betonstraßenplatte Vorgaben zu erarbeiten, die sicherstellen, dass für jeden Berechnungsfall ein leistungsfähiges Netz generiert wird.

### 4.3 Auflagerungsbedingungen, Kontaktbedingungen

Die Modellierung der Lagerungsbedingungen des Modells erfolgt durch Beschränkung einzelner Freiheitsgrade für bestimmte Elemente oder Elementgruppen. Eine elastische Lagerung kann durch zwischengeschaltete Stabelemente oder Volumenelemente simuliert werden.

Um die Lagerungsbedingungen für eine bestimmte Fläche (z. B. die Plattenunterseite) festzulegen, ist es notwendig, die betreffenden Elemente zu einer Gruppe zusammenzufassen. Diese Gruppierung wird erleichtert, wenn die Systematik bei der Vergabe der ID beachtet wird.

Gibt es Unstetigkeiten im Lagerungsverhalten, spricht man von geometrisch nichtlinearem Modellverhalten. Dies ist z. B. der Fall, wenn sich die Straßenplatte teilweise von der Unterlage abhebt. Im Modell verwendete Auflagerelemente müssen in diesem Fall ein zweigeteiltes Materialgesetz beinhalten, das über Einführung eines Zug-E-Moduls nahe null die Übertragung von Zugspannungen zwischen Platte und Unterlage unterbindet. Im Zuge der Berechnungen muss iterativ ermittelt werden, an welchen Auflagerknoten Druck- bzw. Zugspannung anliegt. Dadurch wird die Berechnung um ein vielfaches aufwendiger. Für die frei aufliegende Straßenplatte ist dies aber der Regelfall.

Wird der Unterbau als ein Block aus Volumenelementen modelliert, so ist dieser Block, wie oben beschrieben zu lagern. Ein Abheben kommt für diese Lagerung aber nicht in Betracht. Für den Kontakt zwischen der Platte und dem Unterbau gilt wiederum, dass ein teilweises Abheben möglich ist. Die abhebenden Knoten werden wieder iterativ ermittelt. Um die Konvergenz, der im FEM-Programm enthaltenen Berechnungsroutinen für den Kontakt sicher zu stellen, sind gewisse Bedingungen bei der Vernetzung der Kontaktflächen einzuhalten. Parameter zur näheren Beschreibung des Kontaktverhaltens (z. B. Reibung) können vorgegeben werden. Beim ersten Rechendurchlauf im Zuge der Iteration, wird in einigen FEM-Systemen noch keine Wirksamkeit des Kontaktes berücksichtigt. Das bedeutet, dass das über die Kontaktfläche gelagerte Bauteil eine zusätzliche Fixierung für den ersten Rechendurchlauf benötigt. Weil diese real nicht vorhandene Lagerung das Endergebnis nicht unzulässig verfälschen darf, sind die Lagerungselemente so weich vorzugeben, dass sie bei dem zu erwar-

tenden Verformungsverhalten der Platte möglichst keine Spannungen erzeugen. Andererseits darf diese Lagerung nicht so weich sein, dass die Kontaktflächen im ersten Rechendurchlauf zu weit auseinander liegen. In diesem Fall ist die Konvergenz des Berechnungsalgorithmus nicht mehr gesichert.

Die geometrische Nichtlinearität, welche die Lagerung einer frei aufliegenden Platte beinhaltet, erhöht die Komplexität der Berechnungen beträchtlich. Es sind geeignete Berechnungsparameter zu bestimmen, welche das Lagerungsverfahren der Platte adäquat beschreiben und ein stabiles Funktionieren der Berechnungsroutinen gewährleisten.

### 4.4 Lasten

Eine mechanische Last wird im Rahmen eines FEM-Modells im Allgemeinen durch Kräfte auf Knotenpunkte oder Spannungen auf Elementflächen berücksichtigt. Eine Flächenlast (z. B. Radaufstandsfläche) muss also im ersten Fall auf eine bestimmte Anzahl Einzelkräfte umgerechnet werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass den äußeren Knoten in der betreffenden Fläche korrekterweise kleinere Lasten zugewiesen werden müssen.

Definiert man Pressungen auf Elementflächen, so ist die Pressung auf eine Fläche umzurechnen, welche durch die Vernetzung vorhanden ist. Die Vernetzung ist also in jedem Fall so zu konzipieren, dass die Lasten mit ausreichender Genauigkeit abgebildet werden können.

Prinzipiell ist es möglich, Lasten in beliebiger Anzahl und an beliebiger Stelle zu positionieren.

Die Eingabe von Temperaturlasten erfolgt, indem bestimmten Elementen oder Knoten Temperaturen zugeordnet werden. Die Umrechnung auf die zugehörige Materialdehnung erfolgt über den Wärmeausdehnungskoeffizienten des zugeordneten Materials. Für das betreffende Material wird außerdem eine Temperatur definiert, für die keine temperaturbedingten Dehnungen auftreten.

Die Simulation einer ungleichmäßigen Temperaturbelastung einer Platte erfolgt mittels Zuordnung verschiedener Temperaturen zu den Elementen bzw. Knoten.

Für die Modellierung einer ungleichmäßigen Erwärmung an Ober- und Unterseite ist die Platte somit in horizontale Ebenen zu unterteilen. Die dabei erforder-

derliche Feinheit in der Unterteilung ist durch systematische Testrechnungen zu ermitteln.

Die gleichzeitige Wirkung von Rad- und Temperaturlasten wird in der nichtlinearen Berechnung automatisch berücksichtigt.

#### 4.5 Materialgesetze

Durch die Materialparameter wird einerseits bestimmt wie sich die äußeren Lasten auf den Spannungs- und Verformungszustand des Modells auswirken, andererseits werden aber auch die Größen von Einwirkungen durch Materialparameter bestimmt.

Materialparameter, welche den Belastungszustand beeinflussen, sind die Dichte, der Elastizitätsmodul und der Wärmeausdehnungskoeffizient.

Für die Berechnung mechanischer Problemstellungen sind außerdem Materialgesetze erforderlich, welche den Zusammenhang zwischen dem Spannungs- und dem Verzerrungszustand beschreiben. Im einfachsten Fall wird linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Spannungen und Verzerrungen sind proportional (Hooke'sches Gesetz). In diesem Fall genügen zwei Parameter: Elastizitätsmodul und Querdehnzahl. Mit komplizierteren Materialgesetzen lassen sich auch Phänomene wie Plastifizierung, Relaxation, Spannungsumlagerung usw. beschreiben. Das Modellverhalten wird dann auch bezüglich der Materialparameter nichtlinear. Dies führt zu einem deutlich höheren Rechenaufwand und erfordert eine sorgfältige Kalibrierung des verwendeten Materialgesetzes. Es ist deshalb in jedem Fall zu prüfen, ob es vertretbar ist, mit einem linear-elastischen Materialgesetz zu rechnen.

Des Weiteren sind komplexe Materialgesetze oftmals nur für eine konkrete Materialzusammensetzung gültig und erfordern umfangreiche Mess- bzw. Prüfergebnisse, um genügend genau abgebildet zu werden.

## 5 Einordnung der FEM-Berechnung in den Dimensionierungsprozess

### 5.1 Prinzipieller Ablauf einer FEM-Berechnung im EDV-System

Wie in Kapitel 3 erläutert, befasst sich die FEM im Wesentlichen mit dem Aufstellen von Differentialgleichungssystemen, die die zu Grunde gelegten mechanischen Prinzipien und Gesetze widerspiegeln.

Diese werden zu linearen Gleichungssystemen linearisiert, die mittels eines Solvers, einem numerischen Gleichungslöser, gelöst werden.

Um das FEM-Modell wie in Kapitel 4 beschrieben zu generieren, ist ein weiteres Softwarepaket erforderlich: der sogenannte Preprozessor.

Nachdem der Solver die Berechnung mit den durch den Preprozessor zur Verfügung gestellten Eingabedaten durchgeführt hat, liegen für alle zum Modell gehörenden finiten Elemente Ergebnisdaten vor. Diese sind normalerweise sehr umfangreich und für den Anwender schwer zu interpretieren.

Eine nachgeschaltete Software, der sogenannte Postprozessor, übernimmt es, die gewünschten Ergebnisse zu extrahieren und zu visualisieren.

Der Datenaustausch zwischen Preprozessor, Solver und Postprozessor erfolgt beispielsweise über zwischengeschaltete Dateien. Der Preprozessor erzeugt eine Input-Datei mit den Eingabewerten für die Berechnung. Der Solver liest die Input-Datei, führt die Berechnung durch und erzeugt die Output-Datei mit den Ergebnisdaten. Der Postprozessor liest die Output-Datei und bereitet die Ergebnisdaten nach den Wünschen des Anwenders auf. Die Daten für den Datenaustausch sind normalerweise Textdateien mit eindeutig definierten Strukturen.

Durch den Datenaustausch über Dateien gibt es eine klare Trennung zwischen Preprozessor, Solver und Postprozessor (Bild 5-1 und 5-2). Es wird damit möglich, einen Solver mit verschiedenen Pro- bzw. Postprozessoren zu kombinieren. Ebenso ist es möglich, eigene Pre- und Postprozessoren zu verwenden, die auf ein bestimmtes Problem zugeschnitten sind.



Bild 5-1: Schematische Darstellung der Schnittstelle zwischen [AWDSTAKO] und FE-Rechenkernen

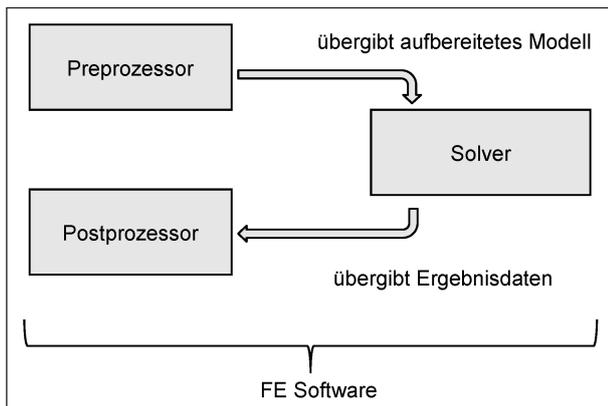


Bild 5-2: Aufbau einer FE-Software

## 5.2 Dimensionierung mit der Finite-Elemente-Methode

Die Dimensionierung einer Fahrbahnplatte nach den Regeln der [RDO Beton 09] erfolgt in der Regel so, dass eine bestimmte Belastungssituation und eine Betonfestigkeit für die Platte definiert werden. Dabei werden verschiedene dimensionierungsrelevante Einflüsse (z. B. die dynamische Wirkung der Last, die Betonermüdung, der Einfluss der Dübel usw.) über Faktoren berücksichtigt. Für diesen Berechnungsfall werden mit geeigneten Formeln (WESTERGAARD [WEST 1926]/EISENMANN [EI 1979]) die Spannungen im Beton berechnet und mit der Betonzugfestigkeit verglichen. Die Ermittlung der erforderlichen Deckendicke erfolgt iterativ.

Beim Einsatz der FE-Methode werden die Betonspannungen nicht mehr über Formeln, sondern mit der wesentlich flexibleren FEM berechnet. Einige der vorher notwendigen Anpassungsfaktoren entfallen damit. Im Übrigen bleibt der Dimensionierungsalgorithmus aber unverändert.

Die Berechnung der Spannungen mit der FEM stellt einen entscheidenden Fortschritt dar. Viele der unter Kapitel 2.2.5 aufgeführten Grenzen des Berechnungsmodells entfallen hiermit. Mehrere Einflüsse müssen nicht mehr pauschal über Faktoren berücksichtigt werden, sondern können realitätsnah in ihrer Wirkung erfasst werden. Im Einzelnen sind dies:

- Die Notwendigkeit der Umrechnung der einwirkenden Radlast auf eine möglichst äquivalente Topflast entfällt. Die Radlast kann mit beliebiger Geometrie berücksichtigt werden. Die Lastausbreitung innerhalb der Platte wird automatisch berechnet. Damit ist die Berechnung für alle Plattendicken gleich präzise.
- Die Spannungen, welche sich aus der Einwirkung mehrerer Radlasten ergeben, müssen nicht mehr pauschal über Erhöhungsfaktoren erfasst werden, sondern können für die konkrete Achskonstellation exakt berechnet werden.
- Eine Beschränkung der Plattengeometrie ist nicht mehr notwendig. Im Prinzip können beliebige Plattengeometrien mit gleicher Genauigkeit berechnet werden.

- Die Auswirkungen einer Vorverformung der Platte müssen nicht mehr über empirisch gewonnene Werte [TEL/SUTH 1935-43] erfasst werden, sondern sind für jeden konkreten Fall mit hinreichender Genauigkeit berechenbar. Damit kann auch die gleichzeitige Wirkung von Temperatur und Verkehrslasten erfasst werden.
- Die Wirkung der Anker und Dübel muss nicht mehr pauschal über einen Faktor berücksichtigt werden. Die Anker und Dübel können im Berechnungsmodell durch geeignete Elemente simuliert werden. Damit werden die Auswirkungen auf die Spannungen und Verformungen im Beton realitätsnah erfasst.

Prinzipiell ist es möglich, die dynamische Lastwirkung, die Materialermüdung und die Probabilistik direkt in der FEM-Berechnung zu erfassen (Bild 5-3). Der notwendige Aufwand für die Modellbildung und die notwendige Rechenzeit lassen eine solche Lösung für die Dimensionierungspraxis aber derzeit nicht zu (Bild 5-4).

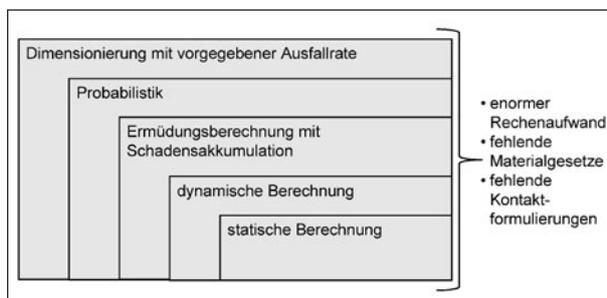


Bild 5-3: Geschlossene theoretische FEM-Lösung

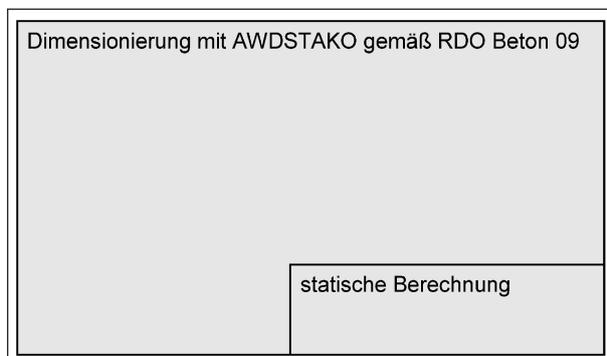


Bild 5-4: Praktikable Lösung mit statischer FE-Berechnung

## 6 Entwicklung eines FEM-basierten Dimensionierungssystems für Betonstraßen

### 6.1 Prinzipielle Vorgehensweise

Die prinzipielle Vorgehensweise bei der Entwicklung des FEM-basierten Dimensionierungssystems kann mit folgenden Punkten zusammengefasst werden:

- Definition der Anforderungen an das Modell,
- Spezifikation des Modells,
- Definition der Anforderungen an den Solver,
- Auswahl des Solvers,
- Verifikation des Berechnungssystems,
- Einbindung in das Dimensionierungsverfahren nach [RDO Beton 09],
- Einbindung in die Dimensionierungssoftware AWDSTAKO,
- Kalibrierung und Testung des Programms.

### 6.2 Modellanforderungen

Für das Berechnungsmodell wurden sieben grundlegende Anforderungen definiert:

#### (1) Leistungsfähigkeit

Das FEM-Modell soll es ermöglichen, für die unter Kapitel 2.2.5 aufgeführten Defizite des vorhandenen Berechnungsmodells eine deutliche Verbesserung zu realisieren. Potenziell muss die Möglichkeit vorhanden sein, das Modell so weiterzuentwickeln, dass die genannten Defizite vollständig beseitigt werden können.

#### (2) Flexibilität

Ziel der Dimensionierung ist die Optimierung der Deckendicke der Fahrbahn. Dafür ist es notwendig, die verschiedenen Einflussparameter zu variieren. Ebenso ist es erforderlich, das Modell an Entwicklungen in der Bautechnik, der Theorie und der EDV anzupassen. Die entsprechenden Veränderungen des Modells müssen schnell und unkompliziert möglich sein.

## (3) Transparenz

Das Modell muss eine klare und übersichtliche Struktur haben, um detaillierte Analyse des Modellverhaltens zu ermöglichen. Dies ist besonders wichtig, wenn die Berechnungen unerwartete Ergebnisse liefern, welche zu interpretieren sind.

## (4) Erweiterbarkeit

Die Konzeption des Modells muss es ermöglichen, auch Dimensionierungsaufgaben zu bearbeiten, die über den Rahmen der zurzeit gültigen RDO Beton hinausgehen. Dazu gehört z. B. die Dimensionierung von Platten mit besonderer Geometrie, wie sie in Knotenpunktbereichen vorkommen (Bischöfsmützen, Trapezplatten, Kreissegmentplatten u. a.). Es sollte aber auch möglich sein, das Modell so zu erweitern, dass sich spezielle Fragestellungen in der Forschung bearbeiten lassen.

## (5) Zukunftssicherheit

Das Modell soll für einen längeren Zeitraum die Grundlage für die rechnerische Dimensionierung im Betonstraßenbau bilden. Es muss deshalb für neue Entwicklungen in Theorie und Praxis und auch im IT-Bereich offen sein.

## (6) Portierbarkeit

Weil die Entwicklung im IT-Bereich sowohl für die Software wie auch für die Hardware sehr dynamisch verläuft, darf das Berechnungsmodell nicht zwingend an eine bestimmte IT-Basis gebunden sein. Eine Portierung auf andere Systeme sollte möglichst einfach zu realisieren sein.

## (7) Einfachheit

Ein FEM-Modell ist naturgemäß komplexer als die bisher im Rahmen der [RDO Beton 09] verwendeten Formelwerke. Im Interesse der Transparenz und nicht zuletzt auch der Rechenzeit ist aber eine möglichst einfache Modellgestaltung mit klaren Strukturen anzustreben.

## 6.3 Untersuchte Modelle

Ausgehend von den unter Kapitel 6.2 genannten Anforderungen wurden fünf unterschiedliche mathematisch-mechanische Modelle konzipiert und getestet.

### 6.3.1 2D-Plattenmodell (Modell 1)

Im 2D-Plattenmodell wird die Platte als Fläche in ihrer Systemebene idealisiert. Die Plattendicke wird über die geometrischen Steifigkeitswerte (Querschnittsfläche, Trägheitsmoment) berücksichtigt. Im FEM-Modell werden dementsprechend zweidimensionale Elemente (Platten-, Scheibenelemente) verwendet. Diese können jeweils an den Knotenpunkten elastisch gelagert (Winklerbettung) werden. Bessere Ergebnisse liefert aber die Verwendung des Steifeziffer-Verfahrens.

Für die Testung des 2D-Modells (Bild 6-1 und 6-2) wurde die Software DIE-Baustatik [DIE 2012] mit dem darin implementierten Modell verwendet. Diese benutzt hybride Plattenelemente (Approximation der Schnittgrößen im Elementinneren und der Verschiebungen an den Elementrändern). Die Berechnung wird nichtlinear mit versagenden Zugfedern durchgeführt.

Eine Modellierung der unteren Tragschichten gibt es in diesem Modell nicht. Ihre Wirkung wird also lediglich mit einem Parameter (Bettungsmodul) beschrieben.

Für die Testrechnungen wurden Einzelplatten und Mehrplattensysteme modelliert und mit Verkehrs- und Temperaturlasten berechnet.

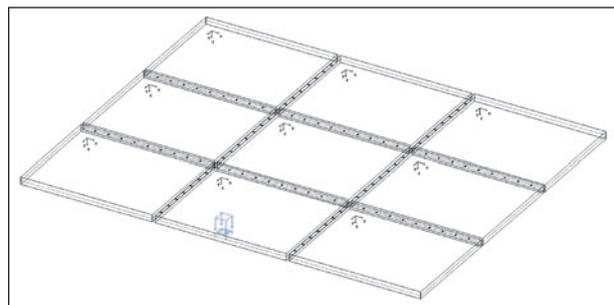


Bild 6-1: 2D-Modell bestehend aus neun verbundenen Platten

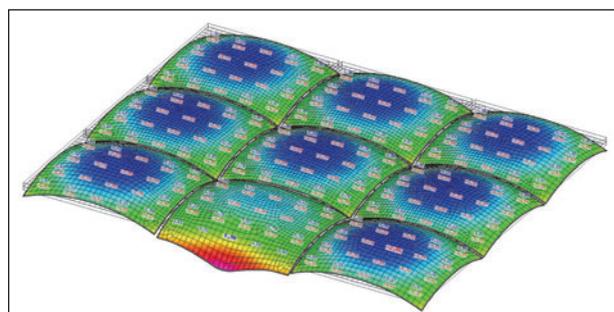


Bild 6-2: Verformungsbild des in Bild 6-1 gezeigten Modells unter Temperatur- und Radlast

In den Mehrplattensystemen wurde die Querkraftübertragung zwischen den Platten mit Stabelementen oder alternativ mit Liniengelenken simuliert.

Der Vorteil der 2D-Modelle ist vor allem in den kurzen notwendigen Rechenzeiten zu sehen (ca. 1s beim 9-Plattenmodell).

Der Verzicht auf die dritte Dimension (Dicke) schränkt aber den Anwendungsbereich dieser Modelle stark ein. Viele für die Forschung relevante Fragestellungen lassen sich mit diesen Modellen nicht analysieren. So ist es z. B. nicht möglich, nichtlineare Temperaturverläufe im Betonquerschnitt zu berücksichtigen. Auch spezielle Dimensionierungsprobleme (mehrschichtige Aufbauten) sind nicht lösbar.

### 6.3.2 Volumenmodell mit zweischichtigem Unterbau (Modell 2)

In diesem Modell wird die Betonplatte als Volumenblock modelliert. Zwei darunterliegende Tragschichten (z. B. HGT und Frostschutzschicht) werden ebenfalls als Volumenblöcke simuliert (Bild 6-3 und 6-4).

Die Kontaktformulierung zwischen Betonplatte und Unterlage erlaubt die rechnerische Simulation des Abhebens der Betonplatte von der Unterlage, wie auch des Eindrückens der Unterlage in den Auflagerflächen. Zwischen den beiden unteren Tragschichten wurde dagegen ein voller Kontakt definiert, weil hier keine Hohllagerung zu erwarten ist.

Die Volumenblöcke für die Tragschichten unter der Platte wurden jeweils über den Rand des darüber liegenden Volumenblocks hinausgeführt. Damit konnte die Wirkung der dreidimensionalen Spannungsausbreitung in den Tragschichten erfasst werden.

Für die Modellierung der Volumenblöcke wurden quaderförmige Elemente (Brickelemente) mit 8 oder 20 Knoten verwendet.

Für diese Modellspezifikation wurden nur Einzelplatten modelliert. Die Berechnungen wurden mit dem Programm Code\_Aster [Code\_Aster 2012] durchgeführt.

In diesem Berechnungssystem wird die Kontaktdefinition im ersten Iterationsschritt der Berechnung nicht berücksichtigt. Es wurde somit erforderlich

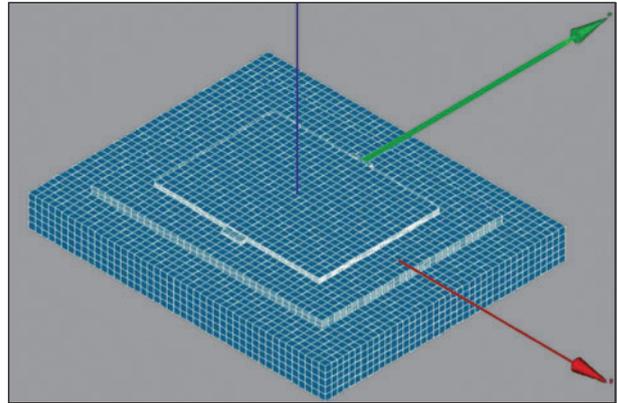


Bild 6-3: Volumenmodell mit zweischichtigem Unterbau

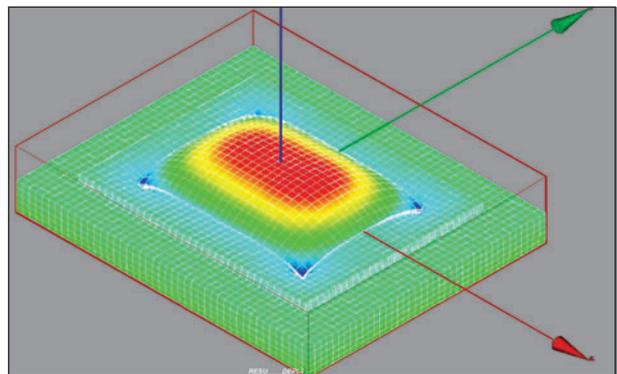


Bild 6-4: Verformtes Volumenmodell mit zweischichtigem Unterbau

eine zusätzliche Fixierung für die Platte zu definieren. Diese musste einerseits so steif sein, dass sich die Platte im ersten Iterationsschritt nicht zu weit verschiebt, andererseits musste die zusätzliche Lagerung aber so weich sein, dass das Berechnungsergebnis nicht signifikant verfälscht wird. Im Berechnungsmodell wurden zwei kleine Volumenblöcke definiert, welche die Platte seitlich halten (siehe Bild 6-3). Der Elastizitätsmodul wurde iterativ so bestimmt, dass die genannten Bedingungen für die Plattenlagerung erfüllt sind.

Entsprechend dem hohen Detaillierungsgrad des Modells ergaben sich längere Rechenzeiten. Der Vergleich mit anderen Modellen zeigte aber, dass durch die Unterteilung der unteren Tragschichten keine signifikante Veränderung der Berechnungsergebnisse für die Platte ergibt.

### 6.3.3 Volumenmodell mit einschichtigem Unterbau (Modell 3)

Dieses Modell unterscheidet sich von dem Vorherigen dadurch, dass die Unterlage als homogener

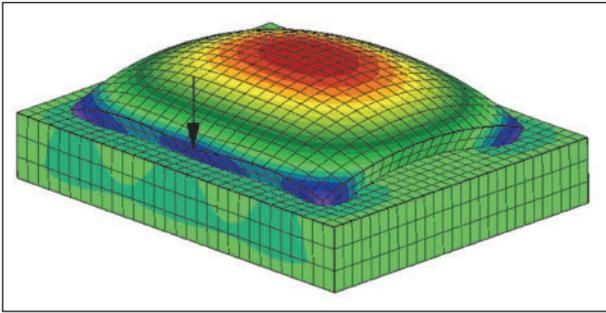


Bild 6-5: Verformtes Modell mit Einzellast am Rand

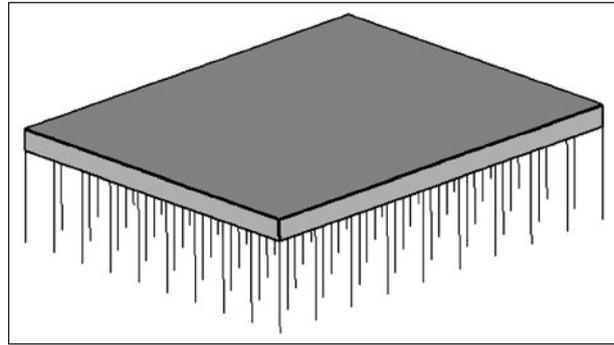


Bild 6-7: Volumenmodell mit Stablagerung

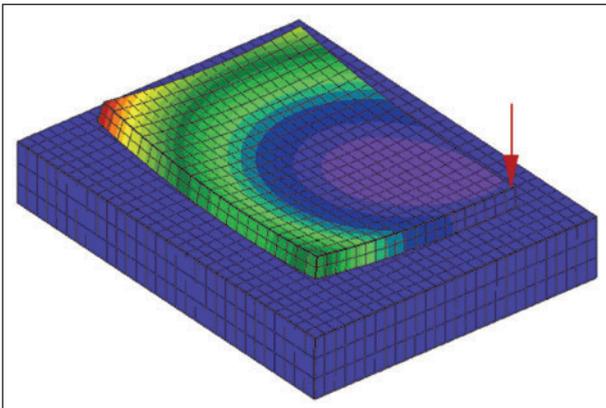


Bild 6-6: Verformtes Modell mit Einzellast in der Ecke

Volumenblock ohne weitere Unterteilung modelliert wurde. Es wurden wiederum 8-Knoten- und 20-Knoten-Brickelemente verwendet und die Interaktion zwischen Platte und Unterlage wurde durch eine Kontaktformulierung beschrieben, welche das Abheben der Platte von der Unterlage (Bild 6-5 und 6-6) ermöglicht.

Für diese Modellvariante wurden ebenfalls Einplatten- und Mehrplattenmodelle generiert. Die Querkraftübertragung zwischen den Platten wurde mit Balkenelementen simuliert.

Die Berechnungen erfolgten mit dem Programm CalculiX [Calc 2013].

#### 6.3.4 Volumenmodell mit Stablagerung (Modell 4)

Innerhalb der vorgenannten Volumenmodelle wurde die Betonplatte jeweils als frei auf der Unterlage aufliegend beschrieben. Über eine Kontaktformulierung wird die Interaktion zwischen Platte und Unterlage beschrieben. Das Modell verhält sich geometrisch nichtlinear, da sich die Platte von der Unterlage abheben kann, d. h. dass die Plattenverformung im Zuge der Berechnung iterativ zu bestimmen ist.

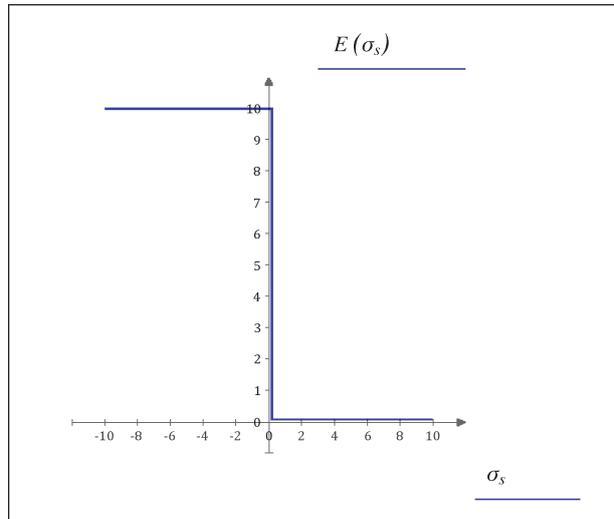


Bild 6-8: Zusammenhang Spannung – E-Modul für das Stabelement

Die Berechnung wird dadurch deutlich aufwendiger und es sind Iterationsprobleme möglich. Um die Berechnung in diesem Punkt zu beschleunigen und stabiler zu gestalten, wurde die Platte auf Stäbe aufgelagert (Bild 6-7).

Das Stabmaterial wurde so definiert, dass die Stäbe auf Zug sehr weich reagieren (Bild 6-8). Es können also keine relevanten Zugspannungen über die Lagerung der Platte übertragen werden. Der Druck-E-Modul wurde so eingestellt, dass die Platte mit realistischen Auflagerreaktionen elastisch gebettet war.

Praktisch wurde damit das Modell mit geometrisch nichtlinearem Verhalten durch ein Modell mit nichtlinearem Materialverhalten ersetzt. Die Berechnung ist also weiter nichtlinear und damit iterativ. Es entfällt aber die Berechnung der zugeordneten Knotenpaare in den Kontaktflächen. Die Zuordnung ist durch die Stäbe vorgegeben.

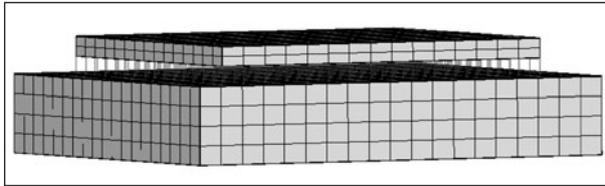


Bild 6-9: Volumenmodell mit Stäben als Koppelementen

### 6.3.5 Volumenmodell mit Stablagerung und unterer Tragschicht (Modell 5)

Mit der vorgehend beschriebenen Stablagerung wurde praktisch eine Winklerbettung (Bettungsmodulverfahren) realisiert. Damit ergeben sich für dieses Modell auch die Nachteile, welche das Bettungsmodulverfahren mit sich bringt. Weil die mittragende Wirkung der Bodenschichten, welche nicht unmittelbar unterhalb der Platte liegen, nicht berücksichtigt wird, reagiert das Modell in den Randbereichen zu weich.

Das Problem wurde gelöst, indem die Lagerungsstäbe auf einen Volumenblock aufgesetzt wurden, welcher die untere Tragschicht simuliert (Bild 6-9). Die Stäbe haben damit nur noch die Funktion von Koppelementen, welche die Kraftübertragung bei Zugspannung (Abheben der Platte) unterbrechen. Gegenüber der freien Kontaktformulierung besteht weiterhin der Vorteil, dass im Zuge der Berechnung keine Zuordnung der Elementknoten aus der Unterseite der Platte und der Oberseite der Gründung ermittelt werden muss. Diese Zuordnung ist durch die Koppelemente praktisch vorgegeben.

Bei den systematischen Testrechnungen erwiesen sich die Stablagerungen als nicht vorteilhaft. Die Berechnung konnte mit diesen Modellen nicht signifikant beschleunigt werden. Um eine Rotation der Stäbe um ihre eigene Achse zu unterdrücken, war die Einführung zusätzlicher Knotenlager erforderlich. Damit wurde das Modell zusätzlich verkompliziert. Die Stablagerung wurde deshalb nicht weiter verfolgt.

### 6.4 Systematische Testrechnungen

Um das Verhalten der verschiedenen Berechnungsmodelle zu vergleichen, wurden systematische Testrechnungen durchgeführt. In Tabelle 6-1 sind die Ergebnisse einer dieser Serienrechnung zusammengestellt. Hier wurden Einzelplatten mit 4 m Länge und Breite mit jeweils einer Radlast von 96 kN und einer Temperaturdifferenz von ± 30 K

Berechnungsfall	Modell 2	Modell 3	Modell 3	Modell 5	Modell 1	Westergaard / Eisenmann
	Code_Aster	CalculiX	ABAQUS	CalculiX	DIE-Baust.	
max S11 [kN/cm <sup>2</sup> ]						
B=4,0m L=4,0m h=15cm dT=30K Rad: Mitte Platte 96kN	0,91	0,89	0,946	0,969	0,87	
B=4,0m L=4,0m h=15cm dT=30K Rad: Rand Platte 96kN	1,134	1,39	1,43	1,08	1,117	0,743
B=4,0m L=4,0m h=15cm dT=30K Rad: Ecke Platte 96kN	0,61	0,379	0,366	0,42	0,205	
B=4,0m L=4,0m h=15cm dT=30K Rad:Mitte Platte 96kN	0,498	0,299	0,222	0,37	0,143	
B=4,0m L=4,0m h=15cm dT=30K Rad: Rand Platte 96kN	0,575	0,636	0,7	0,849	0,43	
B=4,0m L=4,0m h=15cm dT=30K Rad: Ecke Platte 96kN	0,762	0,638	0,645	0,849	0,682	
B=4,0m L=4,0m h=27m dT=30K Rad: Mitte Platte 96kN	0,436	0,311	0,33	0,365	0,296	
B=4,0m L=4,0m h=27cm dT=30K Rad: Rand Platte 96kN	0,578	0,561	0,569	0,566	0,438	0,332
B=4,0m L=4,0m h=27cm dT=30K Rad: Ecke Platte 96kN	0,388	0,23	0,228	0,232	0,113	
B=4,0m L=4,0m h=27cm dT=30K Rad: Mitte Platte 96kN	0,291	0,089	0,119	0,138	0,062	
B=4,0m L=4,0m h=27cm dT=30K Rad: Rand Platte 96kN	0,348	0,202	0,254	0,314	0,184	
B=4,0m L=4,0m h=27cm dT=30K Rad: Ecke Platte 96kN	0,463	0,276	0,266	0,332	0,321	
B=4,0m L=4,0m h=40cm dT=30K Rad: Mitte Platte 96kN	0,266	0,167	0,152	0,18	0,143	
B=4,0m L=4,0m h=40cm dT=30K Rad: Rand Platte 96kN	0,31	0,255	0,268	0,3	0,096	0,189
B=4,0m L=5,5m h=15cm dT=30K Rad: Mitte Platte 96kN	0,891	1,1	1,077	1,04	1,073	
B=4,0m L=5,5m h=15cm dT=30K Rad: Rand Platte 96kN	1,02	1,39	1,461	1,03	1,274	0,855
B=4,0m L=7,5m h=15cm dT=30K Rad: Mitte Platte 96kN	0,961	1,06	1,135	1,07	1,195	
B=4,0m L=7,5m h=27cm dT=30K Rad: Mitte Platte 96kN	0,696	0,638	0,657	0,699	0,676	
B=4,0m L=7,5m h=40cm dT=30K Rad: Mitte Platte 96kN	0,482	0,398	0,392	0,451	0,394	
B=4,0m L=7,5m h=40cm dT=30K Rad: Rand Platte 96kN	0,57	0,585	0,513	0,557	0,489	0,309

Tab. 6-1: Maximale Hauptspannungen für verschiedene Berechnungsfälle bei der Benutzung unterschiedlicher FEM-Modelle

belastet. Die Radlast entspricht damit dem Lastmodell 2 nach [DIN FB 101]. Die Berechnungen wurden für verschiedene Radstellungen und Platten-

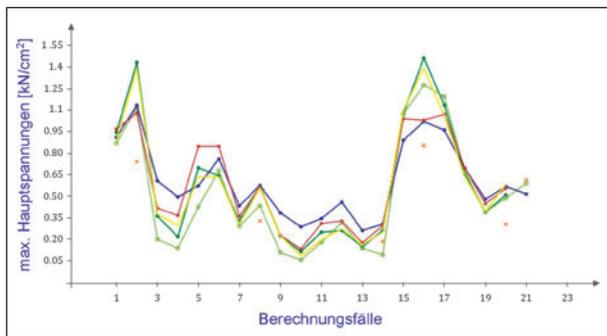


Bild 6-10: Ergebnisse der Serienrechnungen

dicke durchgeführt. Es zeigt sich, dass unterschiedliche Modelldefinitionen auch zu unterschiedlichen Resultaten führen. Eine Feinjustierung der Modellparameter führt zu einer Konvergenz der Ergebnisse. Eine hundertprozentige Übereinstimmung ist aber nicht zu erwarten. Um einen Vergleich mit den analytisch berechneten Werten zu ermöglichen, wurden die Spannungswerte, welche sich unter Benutzung der Formeln von WESTERGAARD und EISENMANN ergeben, ebenfalls angegeben. Das dritte Modell wurde mit den Programmen CalculiX und ABAQUS berechnet. Bei der Bewertung der Ergebnisse ist zu beachten, dass die Modelldefinitionen im Detail unterschiedlich waren. Bei übereinstimmenden Modellen liefern beide Programme nahezu identische Ergebnisse (Bild 6-10).

## 6.5 Modellspezifikationen für das Dimensionierungsprogramm

Ausgehend von den definierten Anforderungen und den Ergebnissen der Modelluntersuchungen wurde ein FEM-Modell für die Dimensionierung von Betonstraßenplatten definiert. Dabei handelt es sich um ein Volumenmodell mit freier Auflagerung der Betonplatte und einschichtiger Modellierung der Tragschicht.

Das Basismodell besteht aus neun Platten, welche untereinander verbunden sind, um die Interaktion der Fahrbahnplatten (Querkraftübertragung) simulieren zu können. Im Basismodell gibt es somit eine Platte, welche allseitig mit angrenzenden Platten verbunden ist. In einem zweiten Schritt wird geprüft, in welchen Berechnungsfällen eine Reduktion der Plattenanzahl im Modell möglich ist (vgl. Kapitel 6.9).

### 6.5.1 Modellbegrenzung

In der unteren Tragschicht breiten sich die aus der Auflagerung der Platte resultierenden Spannungen dreidimensional aus. Um die Wirkung des Unterbaues realistisch zu erfassen, ist es notwendig, das Modell über die Plattenränder hinauszuführen. Im gewählten Modell werden die Ränder des Volumenblocks für den Unterbau um eine Elementbreite über die Plattenränder hinausgeführt. Die Dicke des Unterbaus wird mit 29 cm angenommen. Damit wird es möglich die untere Tragschicht mit nur einer Elementschicht zu modellieren. Um realistische Auflagerungsbedingungen zu simulieren wurden die Materialparameter für den Unterbau für die gewählte Dicke kalibriert (siehe Kapitel 6.5.9).

### 6.5.2 Elemente für Platten

Die Modellierung der Platten erfolgt mit quaderförmigen Brick-Elementen. Diese können aus jeweils acht Knoten gebildet werden, welche die Ecken der Elemente darstellen. Die Verläufe der Spannungen und Verformungen innerhalb der Elemente erfolgt mit linearen Ansatzfunktionen. Eine Biegung kann deshalb innerhalb der einzelnen Elemente selbst nicht beschrieben werden. Es besteht so die Gefahr, dass das System zu steif reagiert und falsche Ergebnisse liefert. Weil dies ursächlich mit der Kalkulation überhöhter Schubspannungen im Element zusammenhängt, wird dieser Effekt als Shaerlocking bezeichnet. Vergleichsrechnungen ergaben, dass für das Plattenmodell mit 8-Knoten-Brickelementen der Lockingeffect zu wesentlichen Verfälschungen der Berechnungsergebnisse führt.

Die Platten werden deshalb vollständig mit 20-Knoten-Brickelementen (Bild 6-11) modelliert. Diese besitzen zusätzlich zu den Eckknoten jeweils einen Knoten in der Mitte einer jeden Kante. Die Ansatzfunktionen für die Spannungen und Verzerrungen innerhalb der Elemente sind quadratisch. Damit können Biegungen im Element abgebildet werden. Shaerlocking tritt hier nicht auf.

Die Definition des Elementes erfolgt durch Eingabe der Knoten in der in 6-11 angegebenen Reihenfolge.

Bei der Festlegung der Elementgröße sind drei wichtige Zusammenhänge zu beachten:

- eine feinere Elementierung erhöht die Genauigkeit,

- je weniger Elemente desto schneller die Berechnung,
- das Verhältnis der Seitenlängen der Elemente (Länge, Breite, Höhe) sollte jeweils nicht größer als 2:1 sein.

Es sind also die größten Elemente zu finden, welche unter Einhaltung des zulässigen Seitenverhältnisses hinreichend genaue Ergebnisse liefern. Dazu wird ein Modell unter schrittweiser Verfeinerung der Elementierung wiederholt berechnet. Wenn sich die Ergebnisse nicht mehr wesentlich unterscheiden, sind die Elemente hinreichend klein gewählt.

Entsprechende Berechnungen (Bild 6-12) ergaben, dass es für die Dimensionierung ausreichend ist, die Dicke der Platte in zwei Elemente zu unterteilen.

Bild 6-12 zeigt beispielhaft die die Ergebnisse einer Berechnung an einer 4 m x 5 m großen Platte mit 28 cm Dicke. In der Mitte des Plattenrandes wurde eine konzentrierte Einzellast von 80 kN angesetzt. Der Temperaturunterschied zwischen Plattenoberkante und -unterkante beträgt 12 K. Die Größe der Elemente wurde in der Anfangsberechnung mit 28 cm x 33,3 cm x 33,3 cm angesetzt. Für die zweite Berechnung wurden die Elementabmessungen halbiert und für die dritte Berechnung gedrittelt.

Es ist klar ersichtlich, dass sich durch den ersten Verfeinerungsschritt noch relevante Ergebnisunterschiede ergeben. Der zweite Verfeinerungsschritt bringt aber kaum noch eine Veränderung.

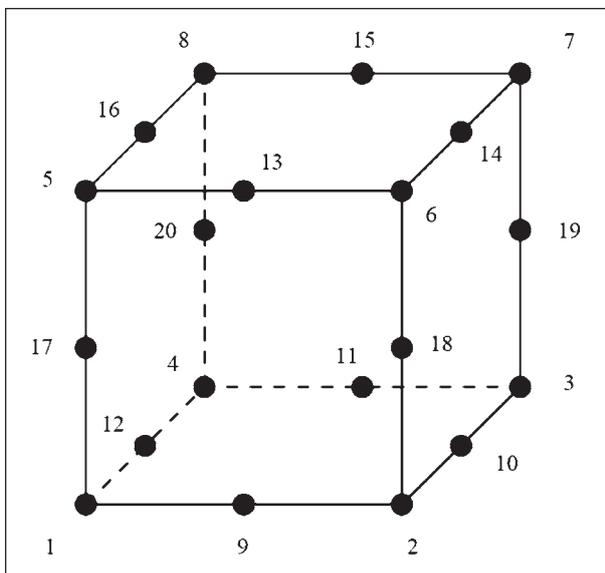


Bild 6-11: 20-Knoten-Brickelement

Die horizontale Ausdehnung der Elemente wird durch das maximale Seitenverhältnis der Elemente begrenzt. Für eine realistische Modellierung der Radaufstandsfläche sollte die Oberfläche der Elemente etwa eine Abmessung von 20 cm x 20 cm haben. Die Seitenlängen der Elemente werden so berechnet, dass sich in Etwa dieser Wert ergibt und alle Elemente die gleichen Abmessungen haben.

### 6.5.3 Elemente für untere Tragschicht

Weil die untere Tragschicht nicht durch Biegung beansprucht wird, ist es möglich, die Modellierung mit 8-Knoten-Brickelementen (Bild 6-13) durchzuführen.

Dabei werden Elemente sogenannte Incompatible-mode-Elemente verwendet, welche leistungsfähig-

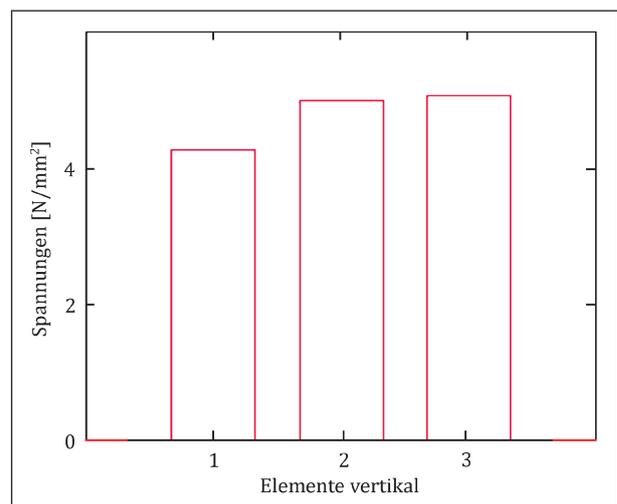


Bild 6-12: Berechnete Spannungen bei verschieden feiner Elementierung

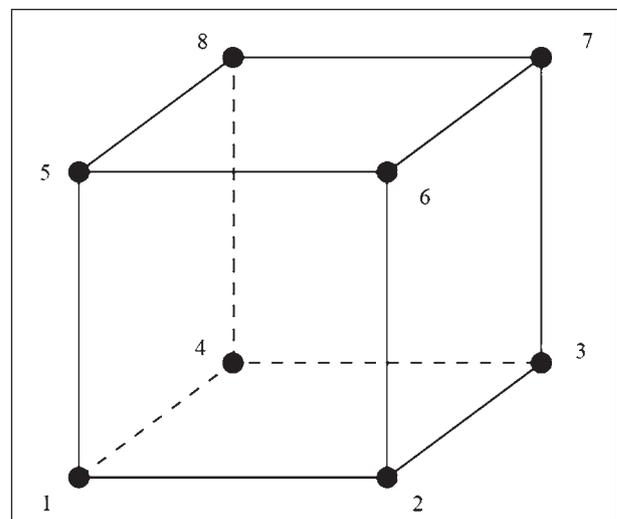


Bild 6-13: 8-Knoten-Brickelement

ger und numerisch stabiler sind als Standard 8-Knoten-Brickelemente.

Die horizontalen Abmessungen der Elemente werden analog zu den Elementen der Platte gewählt. Dadurch werden Länge und Breite der Elemente kleiner als die Höhe. Dies ist aber bezüglich der Konvergenz der Berechnungen unproblematisch.

**6.5.4 Elemente für die Anker und Dübel**

Die Anker und Dübel werden mit 3-Knoten-Balkenelementen modelliert. Jeder Anker bzw. Dübel wird dabei aus drei Elementen zusammengesetzt. Die äußeren Balkenelemente modellieren die Anker- und Dübelbereiche, welche in den Plattenbeton einbinden. Das mittlere Element ist nur 1 mm lang und modelliert den Fugenbereich (Bild 6-14).

Um eine Rotation der Balkenelemente um die eigene Längsachse zu verhindern, wird der entsprechende Freiheitsgrad am mittleren Knoten des mittleren Elementes festgehalten. Programmintern erfolgt eine Umwandlung der 3-Knoten-Balkenelemente in 20-Knoten-Brickelemente (Bild 6-15).

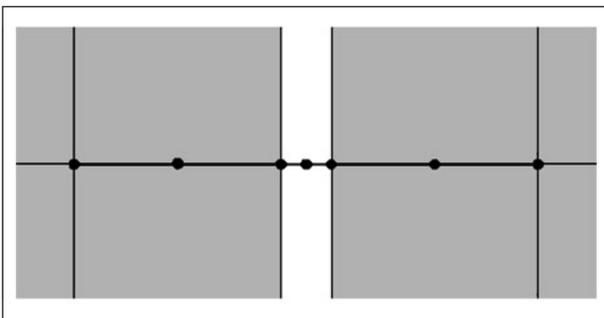


Bild 6-14: Modellierung Anker/Dübel

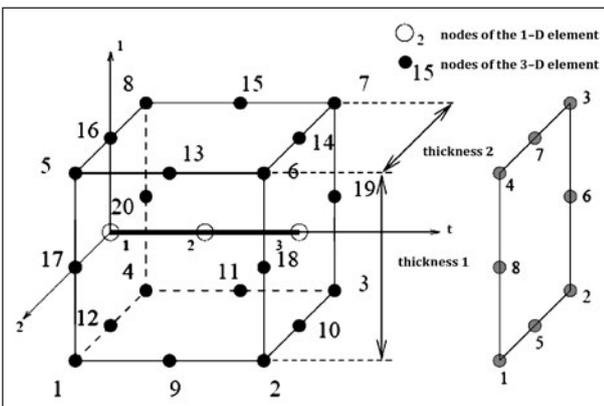


Bild 6-15: Expansion eines 3-Knoten-Balkenelementes in ein 20-Knoten-Brickelement (aus [DHONDT 2013])

Die Berechnung des Modells erfolgt also durchgehend mit Volumenelementen. Der Querschnitt der programmintern generierten Volumenelemente richtet sich nach den durch den Anwender vorgegebenen Querschnittswerten des Balkenelementes.

**6.5.5 Lagerungsbedingungen**

Die Platten werden in vertikaler Richtung als frei auf der Unterlage aufliegend modelliert. Dazu wird eine Kontaktdefinition verwendet, welche festlegt, dass keine Kräfte übertragen werden, wenn sich die Platten von der Unterlage abheben. Umgekehrt werden Druckkräfte auf die Unterlage übertragen, wenn die Platte aufliegt.

Die Kontaktdefinition hat einen großen Einfluss auf den Rechenverlauf (Konvergenzverhalten) und das Berechnungsergebnis. Innerhalb des Modells muss eine unabhängige und eine abhängige Fläche (Master und Slave) definiert werden, zwischen denen der Kontakt stattfindet. Dabei sollte die Elementierung der abhängigen Fläche mindestens genauso fein sein, wie in der unabhängigen Fläche.

Im Berechnungsmodell wird die Oberseite der Unterlage als Master und die Unterseite der Platte als Slave definiert. Bei der Berechnung des Kontaktes werden programmintern zwischen den Knoten der Slave-Fläche und den zugeordneten (nächstliegenden) Knoten der Elemente der Master-Fläche Federelemente generiert. Bei großen Verschiebungen der Kontaktflächen erfolgt die dieser Vorgang in jedem Iterationsschritt. Die Berechnung wird dadurch wesentlich aufwendiger und die numerische Stabilität ist reduziert. Bei kleinen Verschiebungen (smallsliding) erfolgt die Zuordnung der Knoten und Elementfläche nur im ersten Berechnungsschritt und bleibt im Folgenden unverändert. Im Berechnungsmodell für die Betonstraßendimensionierung sind die Verschiebungen zwischen den Kontaktflächen hinreichend klein, dass mit smallsliding gerechnet werden kann.

Das berechnete Kontaktverhalten wird durch die Parameter für die programmintern generierten Federelemente bestimmt. Diese Parameter werden durch bei der Modelldefinition nicht direkt vorgegeben sondern. Stattdessen werden zwei Parameter definiert, welche anschaulich das Kontaktverhalten wiedergeben. Diese werden durch den Befehl PRESSURE, OVERCLOSURE übergeben und bestimmen die Härte des Kontaktes. Der erste Parameter bestimmt wie schnell der Druck zwi-

schen den Kontaktflächen ansteigt, wenn eine Fläche in die andere eindringt. Der zweite Parameter definiert die Zugkraft, welche bei einer Spaltöffnung zwischen den Flächen übertragen wird. Die Kontaktpressung folgt damit dem in Bild 6-16 dargestellten prinzipiellen Verlauf.

Es ist evident, dass die genannten Parameter nur für den Berechnungsalgorithmus von Bedeutung sind. Da keine tatsächliche Materialdurchdringung stattfindet müssten die Parameter realistischerweise bei  $+\infty$  (Druckanstieg bei Durchdringung) bzw. null (Zugspannung bei Spaltöffnung) liegen. Um realitätsnahe Berechnungsergebnisse zu erzielen sollten die Parameter also möglichst dicht an den genannten Werten liegen. Sehr große Werte für den Druckanstieg und kleine Werte für die Zugspannung schränken aber den Arbeitsbereich der generierten Federelemente stark ein, wodurch die Konvergenz der Berechnung verschlechtert wird. Umgekehrt führt ein schwacher Anstieg der Druckspannung und eine hohe Zugspannung zu einer deutlichen Beschleunigung der Berechnung. Die Berechnungsergebnisse werden dadurch allerdings verfälscht, da eine zu große Durchdringung der Körper wie eine weichere Modellierung des Untergrundes wirkt. Die daraus folgende größere Durchbiegung der Platte unter der Radlast führt zu höheren Spannungen. Die Parameter sind also so zu justieren, dass die Berechnung möglichst schnell und stabil verläuft und die Berechnungsergebnisse realitätsnah sind.

Für das definierte Modell wurde der Druckanstieg mit dem Wert 10 festgelegt und die über den Spalt übertragbare Zugspannung mit  $0,0005 \text{ N/mm}^2$ .

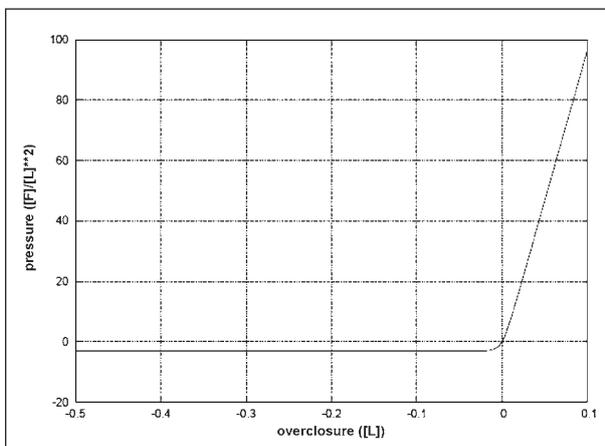


Bild 6-16: Prinzipieller Verlauf der Pressung in der Kontaktfuge in Abhängigkeit von der Spaltgröße (aus [Dhondt 2013])

Diese Zugspannung wird aber erst bei einer Spaltöffnung von  $3,3 \text{ mm}$  wirksam.

Das Modell ermöglicht es, Reibung in der Lagerungsfuge zu berücksichtigen. Für die Dimensionierung wird die Reibung zur Zeit aber vernachlässigt.

In horizontaler Richtung wird das Plattensystem mehrfach gehalten. Für einen Platteneckpunkt wird die Verschiebung in x- und y-Richtung verhindert. Von diesem Punkt ausgehend werden noch jeweils zwei Knoten in x- und y-Richtung gehalten. An diesen Knoten wird jeweils nur die Verschiebung verhindert. Die Lagerung ist so konzipiert, dass keine relevanten Zwängungen auftreten.

An der Unterseite des Volumenblocks für die untere Tragschicht werden alle Knoten in allen drei Richtungen gehalten.

### 6.5.6 Definition der Verkehrslasten

Die Radlasten werden auf die oberen Elementflächen aufgebracht. Sie werden also als Flächenlasten definiert.

Nach [RDO Beton 09] ist ein Regelkontaktndruck von  $0,65 \text{ N/mm}^2$  anzusetzen. Dieser wird Lastfallspezifisch modifiziert (Faktor  $g_{EK}$ ). Im GZT ergibt sich so ein Kontaktndruck von  $0,6 \text{ N/mm}^2$ . Die Radlast ist laut [RDO Beton 09] als Produkt aus der Regelradlast ( $50 \text{ kN}$ ) und dem Lastfaktor ( $g_{E2} = 1,6$  im LF1) zu berechnen. Das ergibt für den LF1 eine Berechnungsraddlast von  $80 \text{ kN}$ . Damit ist die Lasteinleitungsfläche (Reifenkontaktfläche) mit einer Größe von  $0,133 \text{ m}^2$  festgelegt. Das entspricht einem Quadrat mit  $36,5 \text{ cm}$  Seitenlänge.

In anderen Berechnungsvorschriften werden Annahmen in ähnlicher Größenordnung getroffen. Die [DIN EN 1991-2] gibt für das Lastmodell 1 eine Radaufstandsfläche von  $40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$  an.

Im FEM-Modell für die Dimensionierung von Betonstraßen werden die Oberflächen von vier Elementen mit einem gleich großen konstanten Druck beaufschlagt (Bild 6-17). Die Elementgrößen sind so definiert, dass sich damit eine Lastfläche (Reifenkontaktfläche) von ca.  $40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$  ergibt (siehe Kapitel 6.5.2).

Das bedeutet, dass der genaue numerische Wert für die Flächenlast jeweils entsprechend der Größe der Elemente bestimmt werden muss.

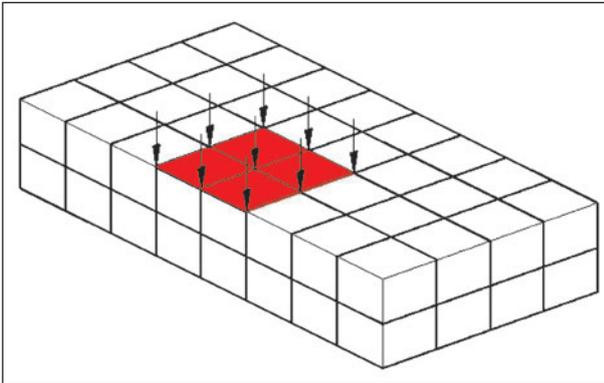


Bild 6-17: Belastungsfläche für die Verkehrslast

### 6.5.7 Definition der Temperaturlasten

Die Temperatur in den Platten wird definiert, indem den Knoten Temperaturwerte zugeordnet werden.

In den [RDO Beton 09] sind die Temperaturgradienten als Quantilwerte der Gesamtheit der positiven Gradienten definiert. Diesem Konzept entsprechend, sind die negativen Temperaturgradienten als entsprechende Quantilwerte der Gesamtheit der negativen Gradienten zu definieren.

Zur Ermittlung dieser Quantilwerte ist zunächst die zugrundeliegende Verteilungsfunktion für die Temperaturgradienten zu bestimmen. Aus [FE 04.218/2008/ARB] ist bekannt, dass die Streuung der Temperaturgradienten sich mit einer 3-parametrischen logarithmischen Normalverteilung beschreiben lässt. Die Auswertung der in [FE 04.218/2008/ARB] bestimmten Verteilungsfunktionen zeigt, dass der Anteil der negativen Gradienten zwischen 40 % und 50 % liegt. Im Weiteren wird deshalb ein Anteil von 45 % angesetzt.

Für die Bestimmung der Parameter der Verteilungsfunktion stehen damit folgende Bedingungen zur Verfügung:

$$q_p \cdot 0,55 + 0,45 = \int_{-x_0}^{C_1 \cdot e^{-0,004 \cdot h}} f(u) du \quad (6-1)$$

$$0,45 = \int_{-x_0}^0 f(u) du \quad (6-2)$$

$q_p$  Quantilwert der positiven Gradienten nach [RDO Beton 09], Anhang A2

$C_1$  Faktor nach [RDO Beton 09], Anhang A2

$x_0$  Parameter der Verteilungsfunktion

$h$  Deckendicke

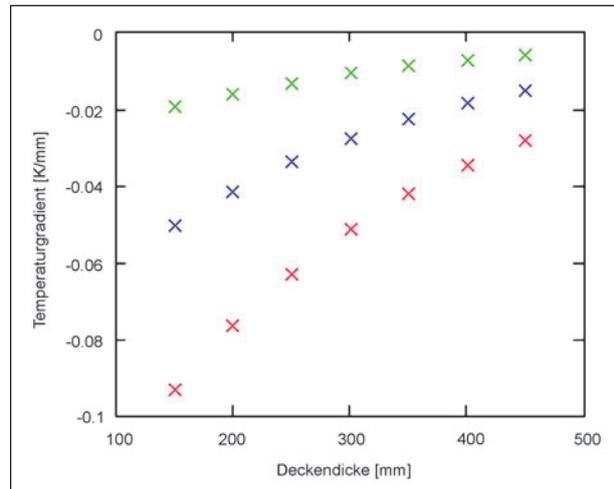


Bild 6-18: Gradientenwerte für verschiedene Deckendicken (Rot: quasi-dynamischer Lastfall; Blau: GZG, Grün: Ermüdungslastfall)

Weil in den [RDO Beton 09] für C1 drei Werte angegeben sind, ergeben sich aus der ersten Bedingung drei Gleichungen. Für die Anpassung der Parameter stehen damit insgesamt vier Gleichungen zur Verfügung. Da die aus Gleichung 6-1 folgenden Gleichungen als Variable die Deckendicke enthalten, sind die Verteilungsfunktion in Abhängigkeit von der Deckendicke zu bestimmen.

Mit den so ermittelten Verteilungsfunktionen lassen sich die anzusetzenden Werte für die Temperaturgradienten berechnen. Es gilt:

$$q_n \cdot 0,45 = \int_{-x_0}^{\delta T} f(u) du \quad (6-3)$$

$q_n$  Quantilwert der negativen Gradienten mit  $q_n = q_p$

$d_T$  Temperaturgradient

Die Gleichung ist numerisch zu lösen.

Für die in den [RDO Beton 09] definierten Lastfälle sind die Ergebnisse in Bild 6-18 dargestellt.

Zu den berechneten Werten lassen sich Regressionsfunktionen (Bild 6-19) in der Form von Gleichung A2-1 aus den [RDO Beton 09] bestimmen:

$$\delta T = C_{1n} \cdot e^{-0,004 \cdot h} \quad (6-4)$$

$C_{1n}$  Faktor analog für negative Gradienten analog zu  $C_1$

Damit können analog zu den  $C_1$ -Faktoren für die positiven Gradienten aus den [RDO Beton 09],  $C_{1n}$ -Faktoren für die negativen Gradienten angegeben werden (Tabelle 6-2).

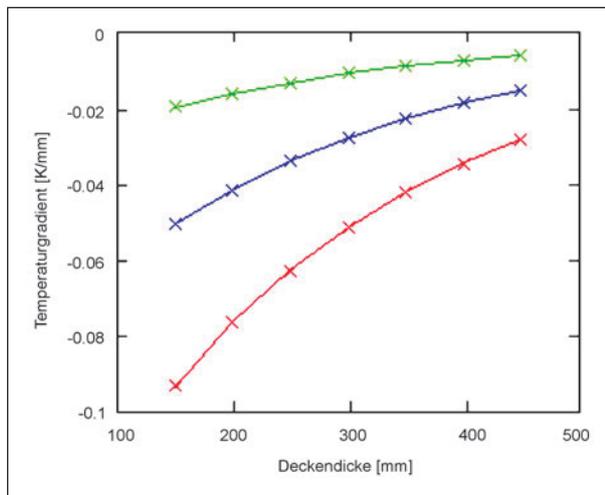


Bild 6-19: Regressionsfunktion der Gradientenwerte für verschiedene Deckendicken (Rot: quasi-dynamischer Lastfall; Blau: GZG; Grün: Ermüdungslastfall)

Lastfall nach [RDO Beton 09]	Faktor C1 [RDO Beton 09]	Faktor C <sub>1n</sub>
Quasi-dynamischer Lastfall	0,14	-0,17
GZG	0,091	-0,092
Ermüdungslastfall	0,052	-0,036

Tab. 6-2: Faktoren zur Bestimmung des Temperaturgradienten

In den [RDO Beton 09] wird aufgrund des Relaxationsvermögens des Betons ein um 33 % vermindertes Elastizitätsmodul für den Beton zur Berechnung des Temperaturmoments angesetzt. Eine Veränderung des Elastizitätsmoduls ist in einer statischen Finite-Elemente-Analyse nicht sinnvoll möglich. Vergleichsrechnungen haben ergeben, dass die Abbildung des Lastfalls mit vermindertem Elastizitätsmodul mit einem um 33 % abgeminderten Temperaturgradienten gegeben ist.

### 6.5.8 Materialdefinition für die Platten

Grundsätzlich können in einem FEM-Volumenmodell sehr komplexe Materialmodelle implementiert werden (siehe z. B. [OESER 2010; PÖLLING 2000; SCHÜTT 2005; OZBOLT 2005; HÄUßLER-COMBE 2005]). Diese ermöglichen es, das mechanische, thermische und hydraulische Materialverhalten nichtlinear und dreidimensional in zeitlicher Entwicklung zu beschreiben. Dadurch können Phänomene wie das Schwinden und Kriechen, viskoses Materialverhalten, plastische Verformungen, Rissbildung und -fortpflanzung und Betonermüdung numerisch simuliert werden.

Diese Materialgesetze sind gegenwärtig vor allem für die Forschung von Bedeutung. Perspektivisch ist aber eine sukzessive Übernahme in die Dimensionierungssoftware zu erwarten.

Im aktuellen Dimensionierungsmodell wird der Beton als linear-elastisches, isotropes Material beschrieben. Relevante plastische Betonverformungen sind nur unter Druckspannung möglich. In unbewehrten Straßenbetonplatten tritt aber der Bruch durch eine Überschreitung der Zugfestigkeit auf. Dies geschieht lange bevor im Druckbereich die Grenze der elastischen Verformungen erreicht ist. Unter Zugspannung verhält sich der Beton bis etwa zu einer Spannung von 70-80 % der Zugfestigkeit linear-elastisch. Danach gibt es eine Abnahme des E-Moduls und nach dem Erreichen der Maximalspannung (Zugfestigkeit) eine ausgedehnte Entfestigung (Nachbruchverhalten). Die realitätsnahe Modellierung der Zugarbeitslinie des Betons im nicht-linearen Bereich stellt den Schlüssel zum besseren Verständnis des Verhaltens einer elastisch gebetteten unbewehrten Betonplatte dar. Nach heutigem Erkenntnisstand ist die Berücksichtigung von Effekten außerhalb des linear elastischen Bereichs nicht praktikabel möglich. Es wird also die volle Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes unterstellt.

Damit kann das Materialverhalten des Betons mit 5 Parametern beschrieben werden:

- Festigkeit,
- Elastizitätsmodul,
- Querdehnzahl,
- Wärmedehnzahl,
- Dichte.

Die entsprechenden Materialwerte sind in den [RDO Beton 09] angegeben. Für den E-Modul wird durchgängig  $E_{ctm}$  angesetzt.

### 6.5.9 Materialdefinition für die unteren Tragschicht

Die unter der Betonplatte liegenden Tragschichten werden durch einen homogenen Volumenblock modelliert. Das bedeutet, dass eine Unterteilung der Tragschichten (z. B. HGT+FSS) aktuell nicht möglich ist. Eine entsprechende Differenzierung hätte auch keinen großen Einfluss auf das Dimensionierungsergebnis für die Platte. Grundsätzlich ist es

aber mit einem FEM-Modell auch möglich, alle Schichten des Oberbaus mit ihren spezifischen Materialeigenschaften zu erfassen.

Weil die unteren Tragschichten also auf einen Volumenblock generalisiert modelliert werden, ist es erforderlich, die Materialparameter für diesen Teil des Modells so zu definieren, dass das Gesamtverhalten dieser Schichten hinreichend zutreffend wiedergegeben wird.

Dabei ist davon auszugehen, dass die Tragschichten nach einer einmaligen planmäßigen Belastung bezüglich ihrer Geometrie und ihren Materialeigenschaften völlig unverändert sind. Anderenfalls wäre durch Akkumulation dieser Veränderungen von einer schleichenden Erosion der Tragschichten auszugehen, was gerade nicht das Ziel der Dimensionierung ist. Der betreffende Volumenblock kehrt also nach einer planmäßig eingetragenen Belastung wieder vollständig in seinen Ausgangszustand zurück. Dies ist genau die Definition für ein elastisches Materialverhalten. Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen kann also wieder über die beiden Parameter E-Modul und Querdehnzahl beschrieben werden. Das gilt auch für ungebundene Tragschichten. Für diese stellt sich, bei Einhaltung bestimmter Grenzwerte für die Hauptspannungen, nach mehrmaliger Belastung ein elastisches Verhalten ein (Shakedown-Bereich A, siehe z.B.: [WERKMEISTER 2003; Numrich 2003]). Dieses elastische Materialverhalten ist zwar nichtlinear (Verfestigung bei Spannungszunahme), die Nichtlinearität ist aber für die Spannungsbereich, welche unter Straßenbetonplatten auftreten, schwach ausgeprägt. Deshalb wird auch eine ungebundene Tragschicht als linear-elastischer Volumenblock modelliert.

Die ungebundenen Schichten können nur in sehr geringem Maße Zugspannungen aufnehmen. Durch die vertikalen Auflasten bildet sich aber ein dreidimensionaler Spannungszustand heraus, in dem sich alle Hauptspannungen im Druckbereich befinden. Es ist also nicht notwendig, hier ein Mate-

	E [N/mm <sup>2</sup> ]	$\mu$
ungebundene Tragschichten	75	0,3
HGT + ungebundenen Tragschichten	125	0,2
Bituminöse Tragschichten + ungebundenen Tragschichten	100	0,2

Tab. 6-3: Materialparameter für die unteren Tragschichten

rial zu definieren, welche bei Zugbeanspruchung versagt (compression-only Material). Generell ist festzuhalten, dass die Größe der linear-elastischen Materialparameter für die unteren Tragschichten keinen sehr großen Einfluss auf die Spannungen in der Betonplatte hat. Eine genauere Spezifizierung der Parameter ist an dieser Stelle erst sinnvoll, wenn auch detailliertere Materialgesetze für die Betonplatte verwendet werden.

Die unteren Tragschichten sind über die Parameter in Tabelle 6-3 definiert.

Die Temperatur spielt in den unteren Tragschichten eine untergeordnete Rolle. Die Wärmedehnzahl wird mit  $1 \times 10^{-5} \text{K}^{-1}$  festgelegt. Das Eigengewicht dieser Schichten spielt ebenfalls eine untergeordnete Rolle. Es wird generell  $24 \text{ kN/m}^3$  angenommen.

#### 6.5.10 Material- und Querschnittswerte für Anker und Dübel

Durch die Anker und Dübel werden Querkräfte und in begrenztem Maße auch Biegemomente übertragen.

Anker und Dübel sind aus Stahl und mit folgenden Materialparametern modelliert. Der Querschnitt der Dübel wurde mit  $20 \times 20 \text{ mm}$  modelliert (Tabelle 6-4).

Die Wirksamkeit der Dübel bezüglich der Querkraftübertragung wird gewöhnlich über den Wirksamkeitsindex abgeschätzt. Die Anker an der Längsfuge verhindern eine Fugenöffnung. Daraus resultiert eine Querkraftübertragung über die Rissverzahnung. Infolge dessen ist der Wirksamkeitsindex an der Längsfuge ähnlich hoch wie an der Querruge. Die Rissverzahnung wird im Berechnungsmodell nicht abgebildet. Die entsprechende Wirkung wird über zusätzliche Balkenelemente simuliert. Im Modell werden die Anker in ähnlichem Abstand wie die Dübel und gleichem Querschnitt angeordnet, da der Wirksamkeitsindex an Längs- und Querruge bei ungeschädigter Konstruktion annähernd gleich ist.

	Dübel	Anker
Elastizitätsmodul [N/mm <sup>2</sup> ]	210.000	210.000
Querdehnzahl	0,3	0,3
Dichte [g/cm <sup>3</sup> ]	7,3	7,3

Tab. 6-4: Materialparameter für die Anker und Dübel

## 6.6 Solver

Für die Einbindung in das Dimensionierungsprogramm sind nur Solver geeignet, welche frei verfügbar und ausreichend leistungsfähig sind, um das definierte Modell zu verarbeiten.

Drei Solver, welche diese Bedingungen erfüllen, wurden bezüglich ihrer Eignung untersucht und bewertet.

### 6.6.1 Z88 Aurora

Das Programm Z88 wurde von Prof. Frank Rieg an der Universität Bayreuth entwickelt. Es ist als GNU-GLP-Software frei verfügbar und in einer deutschen Version erhältlich. Die Software wird seit 1986 kontinuierlich weiterentwickelt, die neueste Version 14.0 läuft unter LINUX oder Windows. Über entsprechende Schnittstellen ist der Datenaustausch mit anderen Programmen möglich. Es sind eine Vielzahl von Elementen verfügbar, welche die Modellierung komplexer mechanischer Strukturen erlauben. Mit dem Programm können Modelle mit geometrisch nichtlinearem Verhalten berechnet werden. Die Berücksichtigung von nichtlinearem Materialverhalten ist derzeit noch nicht möglich.

Die Software Z88 wird in verschiedenen Universitäten und auch in der freien Wirtschaft eingesetzt. Der Quellcode ist nicht offengelegt.

### 6.6.2 Code-Aster

Code-Aster ist ein äußerst leistungsfähiges FEM-Programm, welches die Simulation komplexer Modelle erlaubt. Dabei können statische und dynamische Probleme für feste und flüssige Stoffe berechnet werden. Für viele spezielle Problemstellungen stehen detaillierte Materialmodelle zur Verfügung. Der Modellaufbau, sowie die Auswertung der Ergebnisse (Pre- und Postprocessing) wird durch leistungsfähige grafische Programme (SALOME MECA) unterstützt.

Das Programm läuft unter LINUX. Die frei verfügbare Windows-Version läuft instabil.

Code\_Aster wurde von Electricite de France für den Reaktorbau entwickelt. Seit 1999 ist es als Open Source-Software (GLP-Lizenz) verfügbar. Das Programm wird kontinuierlich weiter entwickelt.

Die offizielle Programmdokumentation ist in französischer Sprache. Die englische Übersetzung ist au-

tomatisch erstellt und entsprechend schwer verständlich. Dies hat zur Folge, dass die Software vor allem im französischen Sprachraum genutzt wird.

Die programmeneigene, für die Definition des Berechnungsmodells genutzte Scriptsprache enthält sehr komplexe Befehle. Obwohl mit dem Programm EFICAS ein komfortables Unterstützungstool verfügbar ist, erfordert deshalb die Erstellung der Input-Dateien einen gewissen Einarbeitungsaufwand. Neue Programmversionen beinhalten gelegentlich Änderungen in der Befehlssyntax, welche dazu führen, dass vorhandene Inputdateien nicht mehr funktionieren. Dies ist besonders für Nutzer problematisch, welche die aktuellen französischsprachigen Dokumentationen nicht verstehen.

### 6.6.3 CalculiX

Das FEM-Programm CalculiX wurde von Guide DHONDT (MTU München) entwickelt. Es ist ebenfalls sehr leistungsfähig, obgleich es nicht ein so großes Anwendungsspektrum wie Code\_Aster abdeckt. CalculiX ist als OpenSource-Software frei verfügbar (GNU-GPL Lizenz). Der Quellcode ist offengelegt. Die Dokumentation steht in englischer Sprache zur Verfügung. Das Programm läuft unter LINUX. Für die regelmäßig erscheinenden Updates wird zeitnah eine Windowsversion durch die amerikanische Firma bConverged bereitgestellt.

CalculiX verwendet für die Input-Datei das Format der international viel genutzten Software ABAQUS. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, zahlreiche auf dem Markt verfügbare Pre- und Postprozessoren zu nutzen. Unabhängig davon steht auch ein von Klaus Wittig (MTU München) programmierter eigener Pre- und Postprozessor (cgx) zur Verfügung.

Zur Modellierung statischer und dynamischer Probleme der Strukturmechanik stellt CalculiX zahlreiche Elemente bereit. Die Berücksichtigung von geometrisch nichtlinearem Modellverhalten ist ebenso möglich wie die Berechnung von Modellen mit nichtlinearem Materialverhalten. CalculiX ermöglicht des Weiteren die Simulation thermodynamischer Prozesse. Neben festen Körpern können auch Fluide modelliert und untersucht werden.

Für die Lösung des Gleichungssystems wird die frei verfügbare Bibliothek-Spooles eingesetzt. Es ist aber auch die Nutzung anderer Solver möglich.

### 6.6.4 Auswahl eines Solvers für die Einbindung ins Dimensionierungssystem

Prinzipiell sind alle drei untersuchten Solver zur Berechnung des definierten FEM-Modells im Rahmen eines Dimensionierungssystems geeignet.

Für das Programm Z88 spricht die Verfügbarkeit einer Dokumentation in deutscher Sprache. Als nachteilig ist aber anzusehen, dass das Programm nicht durch die Nutzer modifiziert werden darf. Eine möglicherweise nützliche Anpassung auf spezielle Erfordernisse ist damit nicht möglich. Kritisch bewertet wird auch, die noch fehlende Möglichkeit zur Berechnung nichtlinearen Materialverhaltens. Auch wenn gegenwärtig für die Dimensionierung nur lineares Materialverhalten angesetzt wird, so ist doch für Forschungszwecke auch die Berücksichtigung nichtlinearer Materialgesetze wichtig.

Die besondere Stärke des Systems Code\_Aster ist zweifellos in der besonderen Leitungsfähigkeit zu sehen. Die enorme Komplexität des Programms führt allerdings auch zu einer starken Unübersichtlichkeit, welche durch die schon genannte Sprachbarriere noch verstärkt wird. Ebenfalls als nachteilig zu bewerten ist das Fehlen einer offiziellen Windows-Version.

Die genannten nachteiligen Merkmale der Programme Z88 und Code\_Aster führen dazu, dass das Programm CalculiX als die am besten geeignete FEM-Solver-Lösung eingestuft wird. Als besonderer Vorzug wird die Kompatibilität zu ABAQUS angesehen. Dies ermöglicht es, völlig unkompliziert Referenzberechnungen mit einem weit verbreiteten kommerziellen Programm durchzuführen. Erfahrungen und Kenntnisse aus dem Kreis der ABAQUS-User werden nutzbar. So ist es z. B. möglich, für die ABAQUS-Verarbeitung programmierte komplexe Materialgesetze (Umat-Dateien) auch für CalculiX zu verwenden.

Die Leistungsfähigkeit von CalculiX bezogen auf die konkret vorliegende Aufgabenstellung wurde mit verschiedenen Testreihen verifiziert. Die Nutzung mehrerer Rechenkerne, wie sie in modernen Prozessoren vorhanden sind, ist mit der 64-Bit-Programmversion möglich.

## 6.7 Maßgebende Spannungen für die Nachweise

Die traditionellen Berechnungsmethoden für Fahrbahnplatten liefern Spannungswerte, welche mit den aus Versuchen bekannten Festigkeitswerten (zulässigen Spannungen) verglichen werden. Dabei wird der Spannungszustand stillschweigend als eindimensional vorausgesetzt. Praktisch ist diese Voraussetzung aber nicht erfüllt. Steht etwa eine Radlast in der Mitte einer quadratischen Platte so ergeben sich gleich große Biegespannungen in x- und y-Richtung. Zusätzlich wirkt eine Vertikalspannung.

Die Berechnung mit der FEM-Methode ermöglicht es, prinzipiell alle Spannungskomponenten in jedem Punkt der Platte zu ermitteln. Es stellt sich also die Frage, ob es ausreichend ist, eine einzige Spannungskomponente mit den Festigkeitswerten zu vergleichen, oder ob die Bildung einer Vergleichsspannung aus allen Komponenten des Spannungstensors erforderlich ist, um die zulässige Grenzbeanspruchung möglichst zutreffend zu ermitteln.

Es existieren verschiedene Spannungsmaße, die für jeden Integrationspunkt angegeben werden können. Im folgenden Kapitel werden verschiedene Spannungsmaße erörtert, wie diese berechnet werden und hinsichtlich ihrer Eignung als Versagenskriterium bewertet.

### 6.7.1 Cauchy-Spannungen

Die direkt aus der Finiten-Elemente-Berechnung hervorgehenden Spannungen sind Cauchy-Spannungen (Bild 6-20).

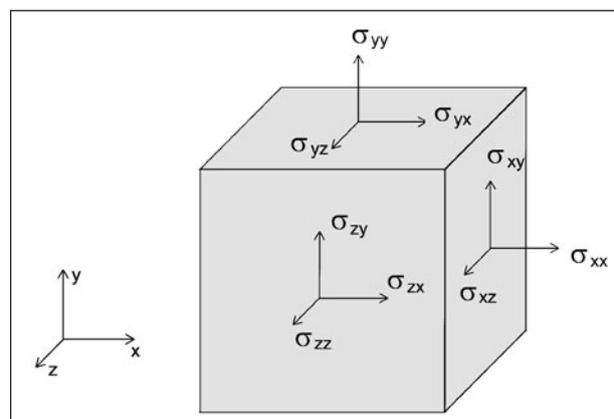


Bild 6-20: Cauchy-Spannungen am infinitesimalen Volumenelement

Der Spannungszustand wird in jedem Integrationspunkt des Modells mittels des Cauchy-Spannungstensors

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (6-5)$$

beschrieben werden.

Im vorliegenden dreidimensionalen Fall besteht der Cauchy-Spannungstensor aus drei mal drei Spannungskomponenten, die sich in tensorieller Schreibweise darstellen lassen.

Der Cauchy-Spannungstensor ist per Definition, bzw. direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen hervorgehend, symmetrisch. Somit wird der Spannungszustand

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (6-6)$$

mit sechs unabhängigen Spannungskomponenten beschrieben.

Der erste Index einer Spannungskomponente gibt die Schnittebene an auf welcher die Spannung wirkt. Ist der erste Index gleich x verläuft die Normale der Schnittebene parallel zur x-Achse. Der zweite Index gibt die Richtung der Spannungskomponente an.

Die Elemente der Hauptdiagonalen sind die Spannungskomponenten in globaler x-, y- und z-Richtung. Die anderen Spannungskomponenten stellen die Schubspannungen dar.

Cauchy-Spannungen sind abhängig von der Wahl des Koordinatensystems und können durch einfache Koordinatentransformation in ein anderes Koordinatensystem überführt werden.

### 6.7.2 Vergleichsspannungen nach Mises

Die Vergleichsspannung nach Mises

$$\sigma_{V,Mises} = \sqrt{\frac{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} - \sigma_{xx} \cdot \sigma_{zz} - \sigma_{yy} \cdot \sigma_{zz}}{2} + 3 \cdot (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)} \quad (6-7)$$

wird oft bei Analysen mit der Finite-Elemente-Methode genutzt, da alle sechs Spannungskomponenten in eine Vergleichsspannung überführt werden.

Die Vergleichsspannungen nach Mises sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems.

Für eine hydrostatische Last

$$F_x = F_y = F_z \quad (6-8)$$

die auf einen Körper wirkt (Bild 6-21) stellt sich ein hydrostatischer Spannungszustand

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (6-9)$$

ein, bei dem alle Spannungen normal zu den Schnittflächen gleich groß und die Schubspannungen null sind (Bild 6-22).

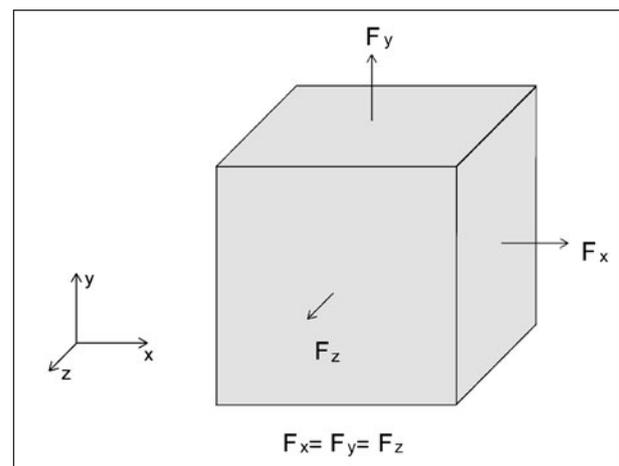


Bild 6-21: Hydrostatische Last am infinitesimalen Volumenelement

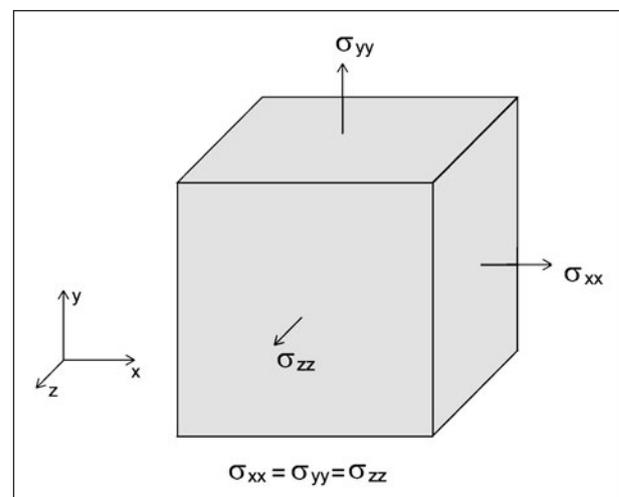


Bild 6-22: Hydrostatischer Spannungszustand am infinitesimalen Volumenelement

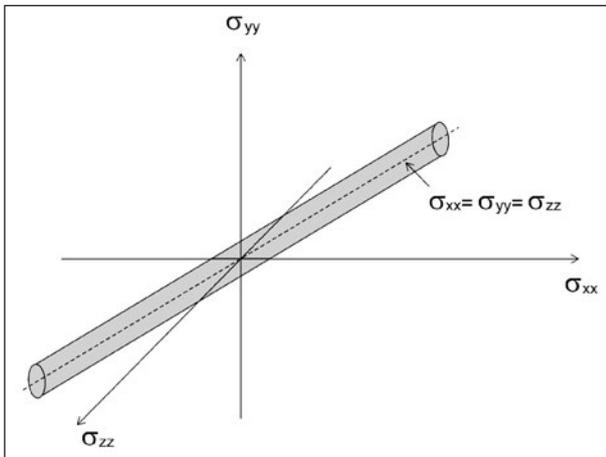


Bild 6-23: Dreidimensionaler Spannungsgraph mit Raumdiagonale

Diese hydrostatischen Spannungszustände liegen alle auf der Raumdiagonalen (Bild 6-23) des dreidimensionalen Spannungsgraphen.

Die Vergleichsspannung nach Mises ist für jeden beliebigen hydrostatischen Spannungszustand

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{ii}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{V,Mises} =$$

$$\sqrt{\frac{\sigma_{ii}^2 + \sigma_{ii}^2 + \sigma_{ii}^2 - \sigma_{ii} \cdot \sigma_{ii} - \sigma_{ii} \cdot \sigma_{ii} - \sigma_{ii} \cdot \sigma_{ii}}{+ 3 \cdot (0^2 + 0^2 + 0^2)}} = 0 \quad (6-10)$$

gleich null. Somit ist die Vergleichsspannung nach Mises ein Maß für die Formänderung an einem Integrationspunkt. Sie eignet sich gut zur Analyse duktiler Werkstoffe wie z. B. Stahl. Als Versagenskriterium für Beton, der jedoch unter gleichmäßiger mehraxialer Zugbelastung ebenfalls versagt, ist die Vergleichsspannung nach Mises keine geeignete Größe.

### 6.7.3 Hauptspannungshypothese

Die Hauptnormalspannungshypothese

$$\sigma_{V,HS} = \sigma_1 \quad (6-11)$$

postuliert ein Materialversagen infolge der maximalen Hauptspannung.

Für den zweidimensionalen Fall (ebener Spannungszustand Bild 6-24) können die Hauptspannungen

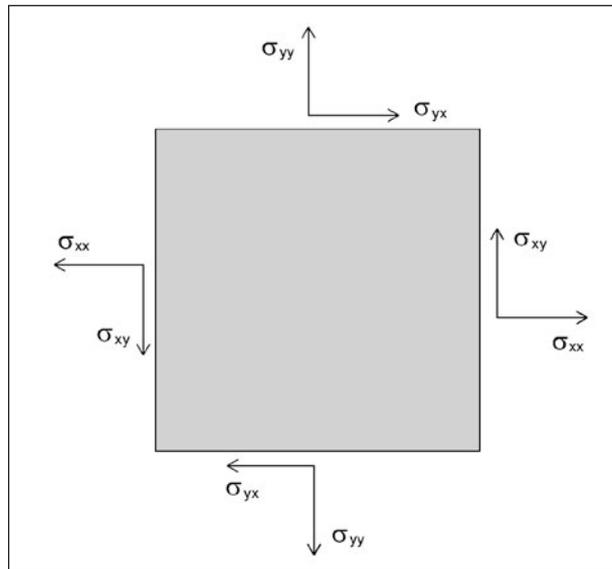


Bild 6-24: Ebener Spannungszustand

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \quad (6-12)$$

direkt berechnet werden, da das Eigenwertproblem für zwei mal zwei Matrizen

$$\left( \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} - \sigma_i \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \quad (6-13)$$

eine quadratische Gleichung erzeugt, das mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen direkt gelöst werden kann.

Der Spannungszustand wird in ein anderes, vom konkreten Spannungszustand bestimmtes, Koordinatensystem transformiert. Die Schubspannungen ergeben sich in der Hauptspannungsdarstellung für den zweidimensionalen Fall zu null (Bild 6-25).

Der Sachverhalt lässt sich gut am Mohr'schen Spannungskreis (Bild 6-26) grafisch darstellen.

Die Bestimmung der Hauptspannungen für den dreidimensionalen Spannungszustand erfolgt ebenfalls über die Lösung des Eigenwertproblems

$$\left( \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} - \sigma_i \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \quad (6-14)$$

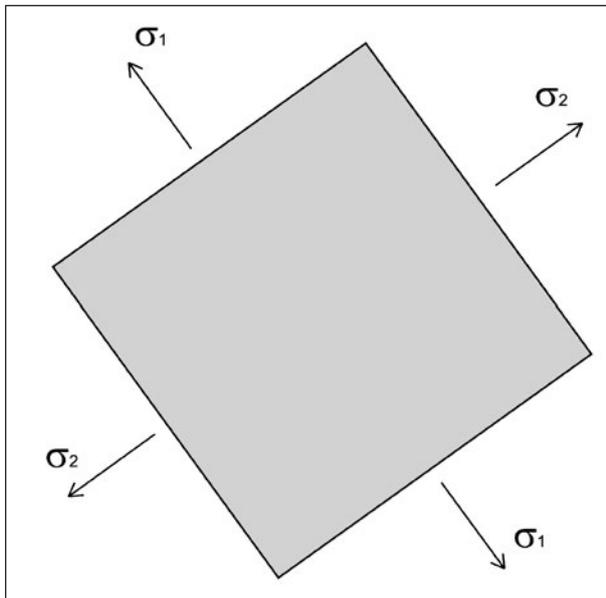


Bild 6-25: Zweidimensionaler Hauptspannungszustand

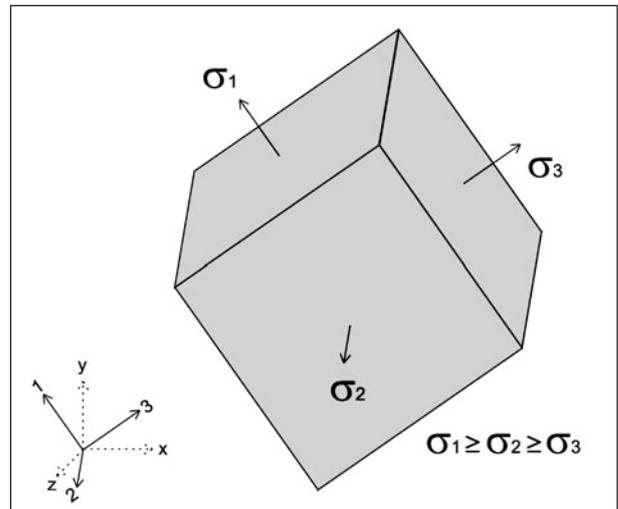


Bild 6-27: Dreidimensionaler Hauptspannungszustand

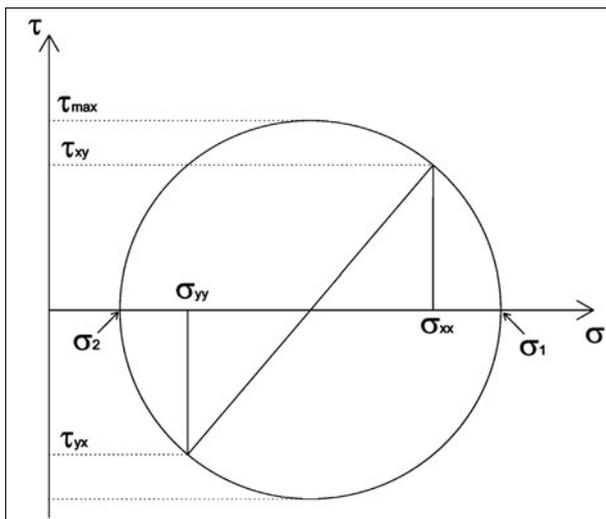


Bild 6-26: Mohr'scher Spannungskreis

Aus der Berechnung der ersten Invariante (Determinante) des Spannungstensors

$$0 = \det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_i & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_i & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_i \end{bmatrix} \quad (6-15)$$

mit der Regel von Sarrus

$$0 = (\sigma_{xx} - \sigma_i) \cdot (\sigma_{yy} - \sigma_i) \cdot (\sigma_{zz} - \sigma_i) + 2 \cdot \sigma_{xy} \cdot \sigma_{yz} \cdot \sigma_{xz} - \sigma_{xz}^2 \cdot (\sigma_{yy} - \sigma_i) - \sigma_{yz}^2 \cdot (\sigma_{xx} - \sigma_i) - \sigma_{xy}^2 \cdot (\sigma_{zz} - \sigma_i) \quad (6-16)$$

ergibt sich eine Gleichung dritten Grades. Die drei reellen Lösungen für  $\sigma_i$  sind die drei Hauptspannungen

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (6-17)$$

die die Spannungen in einem in der Art gedrehten Koordinatensystem beschreiben, dass die Schubspannungen null sind (Bild 6-27).

Die Hauptspannungshypothese nutzt als Versagenskriterium für jeden Spannungszustand die maximale Hauptspannung. Die maximale Hauptspannung ist unabhängig vom gewählten Koordinatensystem und wird nicht die anderen Hauptspannungen beeinflusst, sodass auch für mehraxiale Spannungszustände keine Abminderung von  $\sigma_{V,HS}$  erfolgt. Das Versagenskriterium entsprechend der Hauptspannungshypothese eignet sich insbesondere für spröde Materialien.

### 6.7.4 Vergleichsspannungen nach Tresca

Die Vergleichsspannung nach Tresca

$$\sigma_{V,Tresca} = |\sigma_1 - \sigma_3| \quad \text{mit } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (6-18)$$

postuliert ein Versagen infolge der Spannungsdifferenz zwischen maximaler und minimaler Hauptspannung. Diese Spannungsdifferenz entspricht gleichzeitig der doppelten maximal auftretenden Schubspannung und wird deshalb auch Schubspannungshypothese genannt.

Die Vergleichsspannung nach Tresca liefert für einen hydrostatischen Spannungszustand genau

wie die Vergleichsspannung nach Mises den Wert null. Sie ist geeignet, um Schubversagen bei z. B. Stahl zu analysieren. Als Versagenskriterium für Beton ist sie keine geeignete Größe.

**6.7.5 Spannungskriterium für Beton**

Die grundsätzliche Form des Festigkeitsbereichs des Betons im dreidimensionalen Spannungsraum ist aus zahlreichen Untersuchungen bekannt (siehe Bild 6-28).

Für die Beschreibung der Versagensfläche gibt es verschiedene mathematische Ansätze. Zur Untersuchung der hier vorliegenden Fragestellung wurde das Formelwerk aus [MC 2010] verwendet. Danach ist die Versagensfläche definiert durch:

$$\alpha \cdot \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \cdot \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (6-19)$$

- $I_1$  erste Invariante des Spannungstensors
- $J_2$  zweite Invariante des Spannungsdeviators
- $f_{cm}$  mittlere Betondruckfestigkeit
- $\alpha, \beta, \lambda$  von Festigkeitswerten abhängige Materialparameter (siehe [MC 2010], Kapitel 5.1.6)

Basierend auf diesem Formelwerk wurde die höchste zulässige Hauptspannung in Abhängigkeit

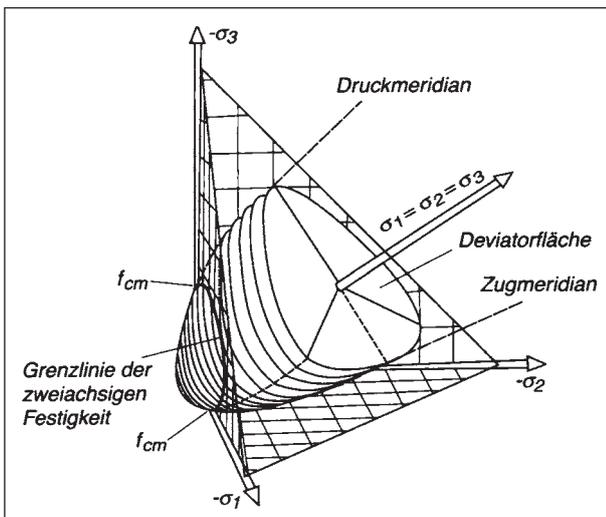


Bild 6-28: Betonfestigkeit unter dreiachsiger Beanspruchung (aus [MÜLLER 2009])

von den anderen Hauptspannungen berechnet. Dabei wurde ein Straßenbeton StC30/37-3,7 angenommen. Die Werte für die zweitgrößte Hauptspannung wurden schrittweise von null bis zur Festigkeitsgrenze gesteigert. Für die relevanten Berechnungsfälle sind die größten Hauptspannungen ( $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ ) als horizontal wirkend anzunehmen. Die dritte Hauptspannung wirkt damit vertikal. Für die hier zu untersuchenden Belastungen treten Vertikalspannungen in relevanter Größe nur als Druckspannungen auf. Als betragsmäßige Obergrenze kann eine Spannung von 0,5 N/mm<sup>2</sup> angesehen werden.

Die Berechnungsergebnisse sind in Tabelle 6-5 zusammengestellt.

Es wird deutlich, dass die maximal zulässige Zugspannung durch einen dreiachsigen Spannungszustand kaum verändert wird. Für die Dimensionierung ist es also ausreichend, die maximale Hauptspannung mit den Festigkeitswerten für den Beton zu vergleichen.

Das Versagenskriterium entsprechend der Hauptspannungshypothese wird für die Dimensionierung maßgebend.

Zulässige maximale Zugspannung		
$s_1$	$s_2$	$s_3$
N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>
4,707	0	0
4,72	0,5	0
4,74	1	0
4,75	1,5	0
4,77	2	0
4,78	2,5	0
4,78	3	0
4,78	3,5	0
4,77	4	0
4,67	4,5	0
4,6	4,6	0
4,55	4,55	-0,5

Tab. 6-5: Zulässige maximale Hauptspannungen bei verschiedenen dreiachsigen Spannungskonstellationen

## 6.8 Relevante Lastfälle am Referenzsystem

Die Berechnung der Spannungen für die Dimensionierung mit der Finiten-Elemente-Methode ermöglicht eine Auswertung beliebiger Temperatur-Verkehrslastkombinationen. Im Folgenden sind die untersuchten Lastkombinationen, die zur Eingrenzung der möglichen relevanten Lastfallkombination genutzt wurden, aufgeführt.

### 6.8.1 Temperaturlast

Die Verkehrslast in einer Finite-Elemente-Berechnung wirkt auf ein durch Temperaturlast vorverformtes System.

Negative Temperaturgradienten bewirken ein Aufschüsseln (Bild 6-29) der Platte bzw. des Plattensystems (Bild 6-30).

Positive Temperaturgradienten bewirken ein Aufwölben (Bild 6-31) der Platte bzw. des Plattensystems (Bild 6-32).

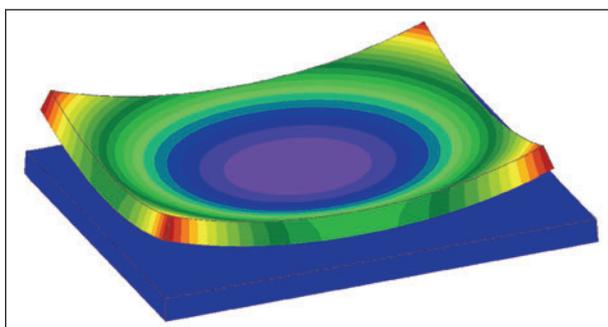


Bild 6-29: Einzelplatte mit negativem Temperaturgradient (400-fach überhöhte Deformation)

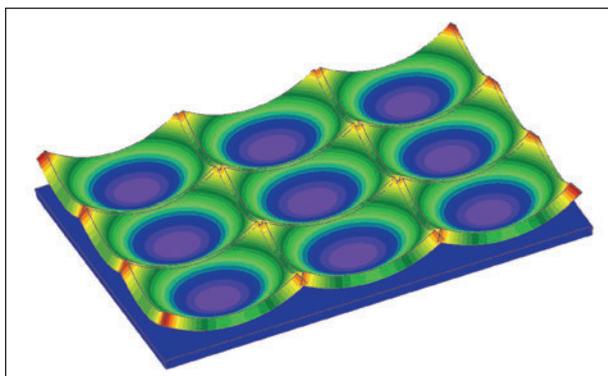


Bild 6-30: Plattensystem mit negativem Temperaturgradient (1.000-fach überhöhte Deformation)

### 6.8.2 Verkehrslastfälle auf einer Platte

In der [RDO Beton 09] werden nur Radlasten an Längs- und Querfuge berechnet. Zur Ermittlung relevanter Lastfälle wurden die dargestellten Lastpositionen untersucht (siehe Bild 6-33 und Tabelle 6-6).

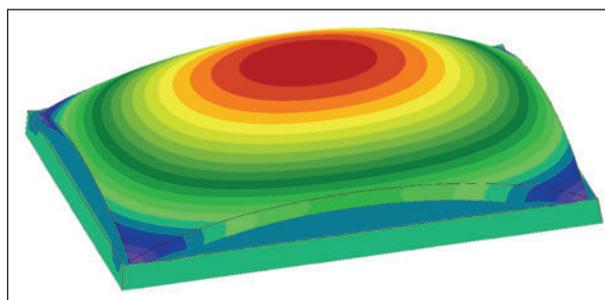


Bild 6-31: Einzelplatte mit positivem Temperaturgradient (1.000-fach überhöhte Deformation)

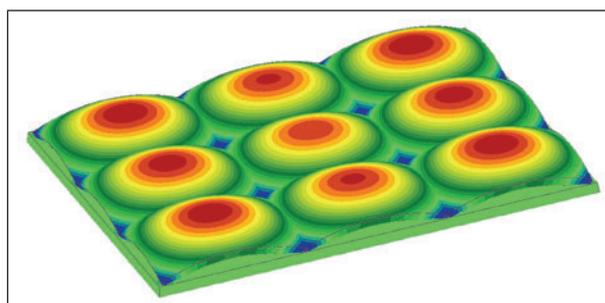


Bild 6-32: Plattensystem mit positivem Temperaturgradient (1.000-fach überhöhte Deformation)

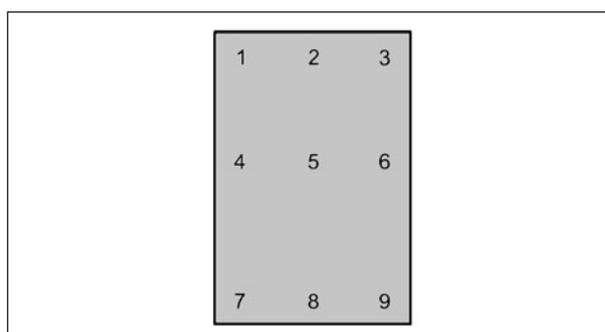


Bild 6-33: Lastpositionen auf einer Platte

Verkehrslastfall	Lastpositionen (LP)
Rad Ecke	1, 3, 7, 9
Rad Mitte	5
Rad Längsfuge	4, 6
Rad Querfuge	2, 8

Tab. 6-6: Zuordnung der Lastpositionen zu den Verkehrslastfällen



Platte innen oder außen	Temperaturlastfall	Lastfallgruppen
innen	negativer Gradient	1 = 3 = 7 = 9
		2 = 8
		4 = 6
innen	positiver Gradient	2 = 8
		4 = 6

Tab. 6-8: Reduktion der zu führenden Berechnungen durch Bildung von äquivalenten Lastfallgruppen für den Hauptfahrstreifen

Temperaturlastfall	Lastfall
negativer Gradient	2, 3, 6
positiver Gradient	2, 5, 6

Tab. 6-9: Zu führenden Berechnungen für den Hauptfahrstreifen am 9-Plattensystem

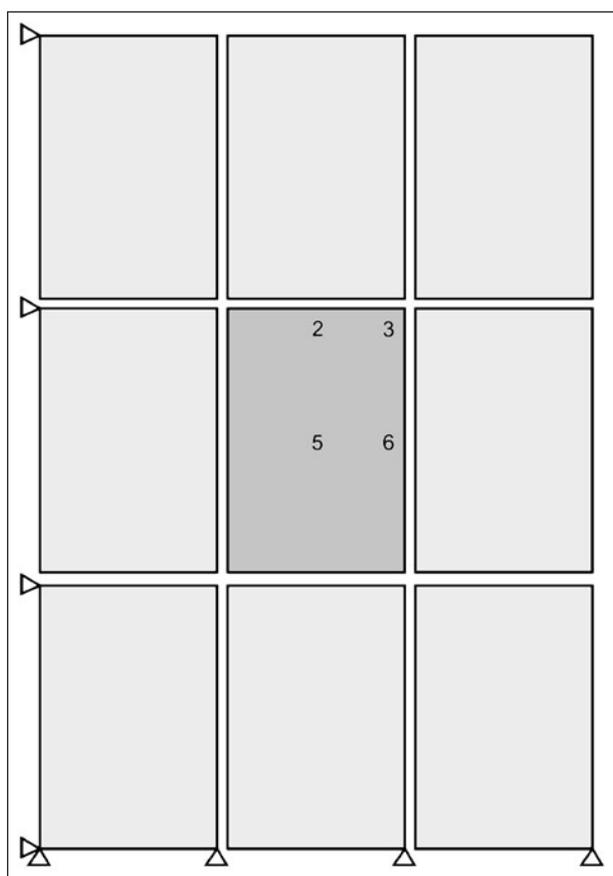


Bild 6-35: 9-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Hauptfahrstreifen

Für den Nebenfahrstreifen (Platte außen) mit einem freien Plattenrand zeigt sich, dass für die Berechnung folgende Lastfallgruppen und Zusammenhänge ergeben (Tabelle 6-10).

Platte innen oder außen	Temperaturlastfall	Lastfallgruppen
außen	negativer Gradient	1 = 7 < 3 = 9
		4 < 6
		2 = 8
außen	positiver Gradient	1 = 7 < 3 = 9
		4 < 6
		2 = 8

Tab. 6-10: Reduktion der zu führenden Berechnungen durch Bildung von äquivalenten Lastfallgruppen

Temperaturlastfall	Lastfall
negativer Gradient	2, 3, 6
positiver Gradient	2, 5, 6

Tab. 6-11: Zu führenden Berechnungen für den Nebenfahrstreifen am 9-Plattensystem

Die äquivalenten Ergebnisse für die Lastpositionen 1 und 7, 3 und 9, 2 und 8 erfüllen auch hier die sich aus der Symmetrie des Systems ergebenden Anforderungen.

Auffällig ist, dass die Spannungen für die Lastfälle am freien Plattenrand größer ausfallen als die an der Innenfuge. Dies ist plausibel und deckt sich mit den Erfahrungen und dem Dimensionierungssystem nach [RDO Beton 09], da hier für die Dimensionierung des Hauptfahrstreifen die Verkehrslast mit einem Dübel- bzw. Ankerfaktor abgemindert wird.

Diese Faktoren entfallen im erarbeiteten Finite-Elemente-Modell, da je nach zu berechnendem Fahrstreifen eine andere Tragwirkung eintritt.

Die Spannungen infolge einer Radlast am freien Plattenrand müssen höher sein als an einer Innenfuge, da am freien Rand die Querkraft und Momentenübertragung über die Dübel und Anker nicht gegeben ist.

Es ergeben sich in Kombination mit dem positiven und negativen Temperaturgradienten sechs zu berechnende Lastfälle für den Nebenfahrstreifen (Tabelle 6-11 sowie Bild 6-36).

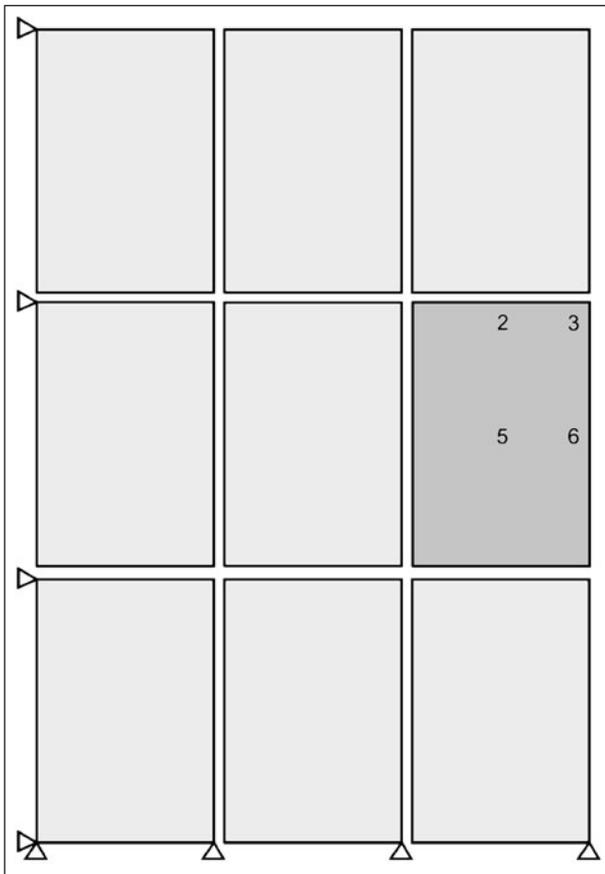


Bild 6-36: 9-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Nebenfahstreifen

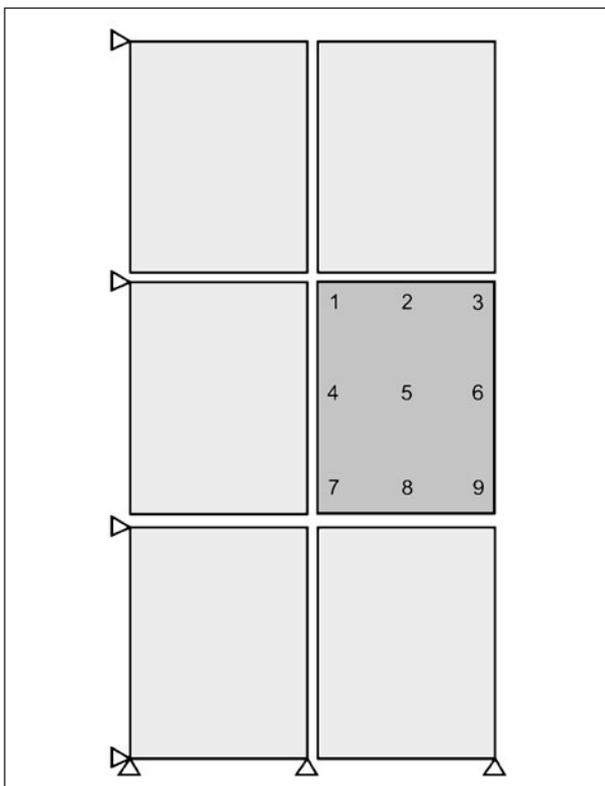


Bild 6-37: 6-Plattensystem mit untersuchten Lastpositionen

## 6.9 Verbesserung der Rechenzeit – Reduktion der Modellgröße

### 6.9.1 Reduktion des Modells

Die Berechnung des vollständigen 9-Platten-Modells erfordert erhebliche Rechenzeit. Es ist deshalb sinnvoll zu untersuchen, ob auch mit kleineren Modellen hinreichend genaue Ergebnisse erzielt werden können. Aus diesem Grund wurden neun für die Dimensionierung potenziell relevante Lastgruppen definiert, welche an Plattensystemen mit unterschiedlicher Plattenanzahl berechnet wurden.

### 6.9.2 6-Plattenmodell

Für das 6-Plattenmodell wurden ebenfalls alle Lastpositionen in einer Serienrechnung ausgewertet (Bild 6-37).

Infolge Systemsymmetrie ergaben sich analog zum 9-Plattensystem Lastfallgruppen, sodass die Lastpositionen 1 und 7, 2 und 8 sowie 3 und 9 äquivalente Ergebnisse liefern. Im Folgenden wurde untersucht welche Lastfälle zur Berechnung des Haupt- und Nebenfahstreifens durchgeführt werden können und ob das auf sechs Platten reduzierte System zur Berechnung einzelner Lastfälle genutzt werden können.

Für den Hauptfahstreifen sind die Lastfälle in Tabelle 6-12 sowie in Bild 6-38 zu betrachten.

Nach Vergleich der Serienrechnungsergebnisse können folgende Lastfallkombinationen für den Hauptfahstreifen ohne Einschränkung auf einem 6-Plattensystem berechnet werden und liefern zum 9-Plattensystem äquivalente Ergebnisse (siehe Tabelle 6-13).

Für den Nebenfahstreifen sind die Lastfälle in Tabelle 6-14 sowie in Bild 6-39 zu betrachten.

Nach Vergleich der Serienrechnungsergebnisse können folgende Lastfallkombinationen für den Nebenfahstreifen ohne Einschränkung auf einem 6-Plattensystem berechnet werden und liefern zum 9-Plattensystem äquivalente Ergebnisse (siehe Tabelle 6-15).

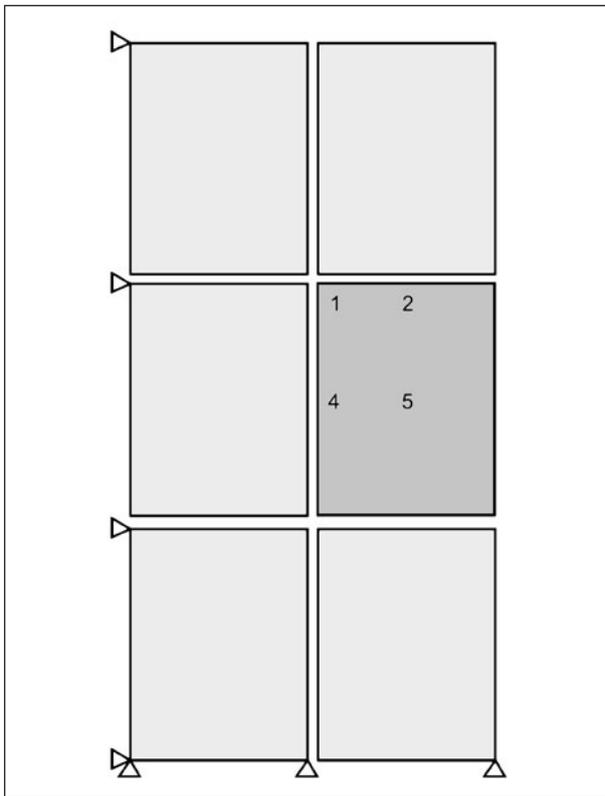


Bild 6-38: 6-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Hauptfahrstreifen

Temperaturlastfall	Lastfall
negativer Gradient	1, 2, 4
positiver Gradient	2, 4, 5

Tab. 6-12: Zu führenden Berechnungen für den Hauptfahrstreifen am 6-Plattensystem

Temperaturlastfall	Lastfall
positiver Gradient	2, 4, 5

Tab. 6-13: Zum 9-Plattensystem äquivalente Lastfallkombinationen für den Hauptfahrstreifen am 6 Plattensystem

Temperaturlastfall	Lastfall
negativer Gradient	2, 3, 6
positiver Gradient	2, 5, 6

Tab. 6-14: Zu führenden Berechnungen für den Nebenfahrstreifen am 6-Plattensystem

Temperaturlastfall	Lastfall
positiver Gradient	2, 4, 6

Tab. 6-15: Zum 9-Plattensystem äquivalente Lastfallkombinationen für den Nebenfahrstreifen am 6-Plattensystem

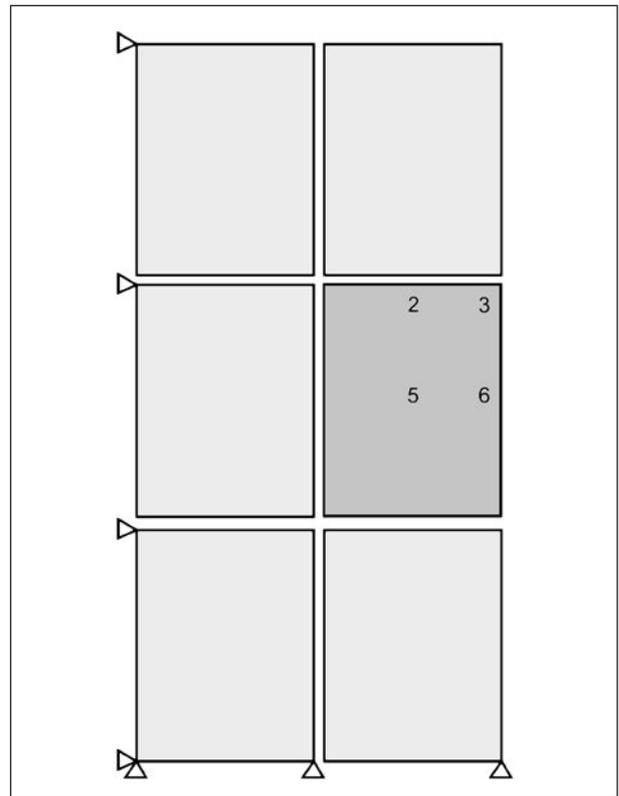


Bild 6-39: 6-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Nebenfahrstreifen

Temperaturlastfall	Lastfall
negativer Gradient	4, 7, 8
positiver Gradient	4, 5, 8

Tab. 6-16: Zu führenden Berechnungen für den Hauptfahrstreifen am 4-Plattensystem

### 6.9.3 4-Plattenmodell

Die Serienrechnung für das 4-Plattenmodell wurden mit alle Lastpositionen durchgeführt (Bild 6-40).

Es zeigen sich keine Lastgruppen infolge Symmetrie bilden. Dies spiegelt auch die Serienrechnung wieder. Die Lastpositionen 1, 2 und 3 weichen jedoch erheblich von den in der Fahrbahn auftretenden Last-Lagerungsbedingungs-Kombinationen ab und werden ausgeschlossen.

Die Berechnung des Hauptfahrstreifens erfordert die Betrachtung der Lastfälle auf dem 4-Plattensystem in Tabelle 6-16 sowie Bild 6-41.

Der Vergleich der Serienrechnungsergebnisse zeigt, dass die Lastfallkombinationen in Tabelle 6-17 ohne Einschränkung für den Hauptfahrstreifen auf einem 4-Plattensystem berechnet werden und liefern zum 9-Plattensystem äquivalente Ergebnisse.

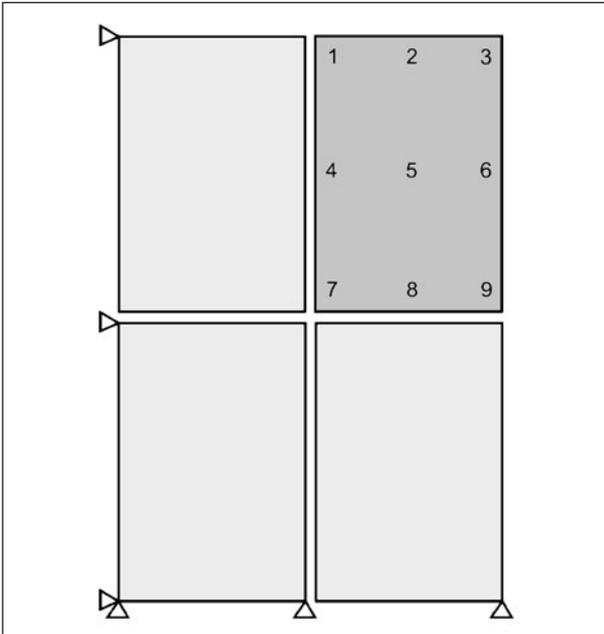


Bild 6-40: 4-Plattensystem mit untersuchten Lastpositionen

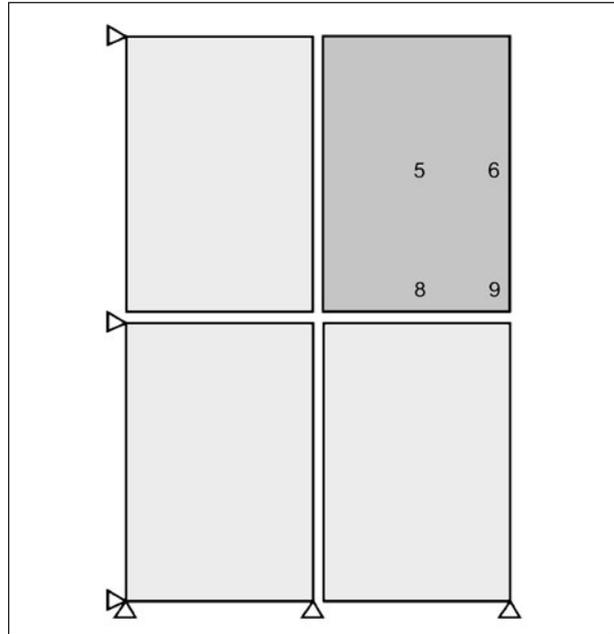


Bild 6-42: 4-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Nebenfahstreifen

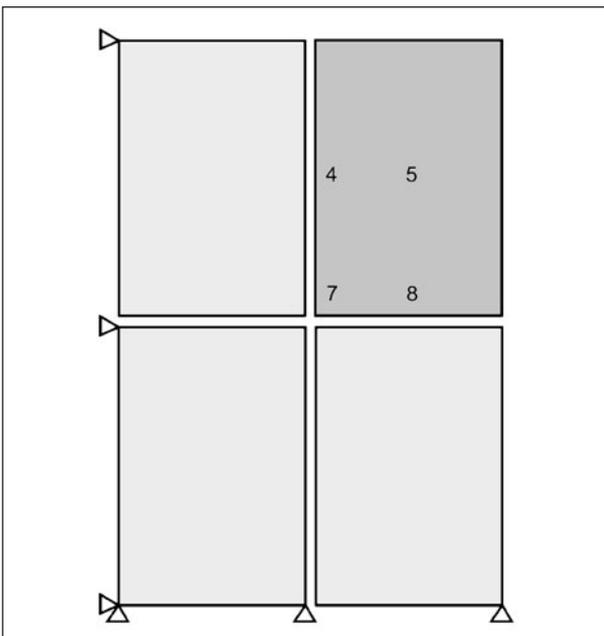


Bild 6-41: 4-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Hauptfahstreifen

Temperaturlastfall	Lastfall
positiver Gradient	4, 5, 8

Tab. 6-17: Zum 9-Plattensystem äquivalente Lastfallkombinationen für den Hauptfahstreifen am 4-Plattensystem

Für den Nebenfahstreifen sind die Lastfälle in Tabelle 6-18 sowie Bild 6-42 zu betrachten.

Nach Vergleich der Serienrechnungsergebnisse können die Lastfallkombinationen in Tabelle 6-19

Temperaturlastfall	Lastfall
negativer Gradient	6, 8, 9
positiver Gradient	5, 6, 8

Tab. 6-18: Zu führenden Berechnungen für den Nebenfahstreifen am 4-Plattensystem

Temperaturlastfall	Lastfall
positiver Gradient	5, 6, 8

Tab. 6-19: Zum 9-Plattensystem äquivalente Lastfallkombinationen für den Nebenfahstreifen am 4-Plattensystem

für den Nebenfahstreifen ohne Einschränkung auf einem 4-Plattensystem berechnet werden und liefern zum 9-Plattensystem äquivalente Ergebnisse.

### 6.9.4 Einzelplatte

Für die Einzelplatte sind alle 9 Lastpositionen in eine Serienrechnung mit eingeflossen (Bild 6-43).

Aufgrund der Lagerungsbedingungen kann nur der Lastfall Plattenmitte als grobe Näherung des 9-Plattensystems angenommen werden (Tabelle 6-20).

Der Lastfall Plattenmitte an der Einzelplatte kann als Abschätzung zum Ausschluss des Lastfalls genutzt werden, da das Spannungsergebnis leicht überschätzt wird (Bild 6-44).

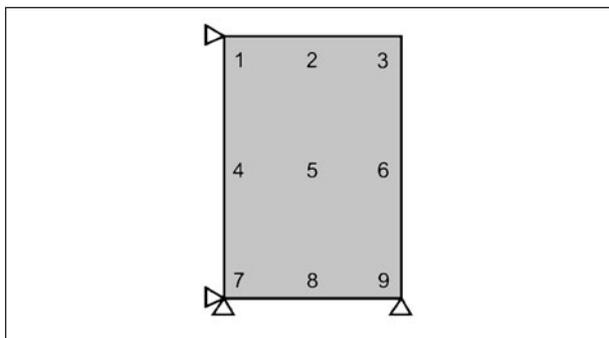


Bild 6-43: Einzelplatte mit untersuchten Lastpositionen

Temperaturlastfall	Lastfall
positiver Gradient	5

Tab. 6-20: Zu führenden Berechnungen für den Hauptfahrstreifen und Nebenfahrstreifen an der Einzelplatte

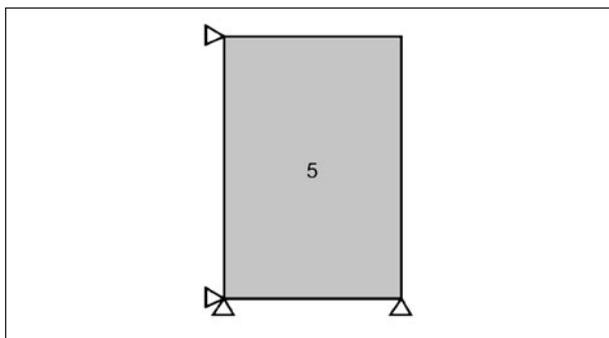


Bild 6-44: 1-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Haupt- und Nebenfahrstreifen

### 6.9.5 Ausgeschlossene Plattensysteme

Es wurden auch Untersuchungen an weiteren Plattensystemen, die aufgrund ungünstiger Lagerungseinflüsse von weiteren Untersuchungen ausgeschlossen wurden, unternommen. Diese seien der Vollständigkeit halber in den Bildern 6-45 bis 6-47 genannt.

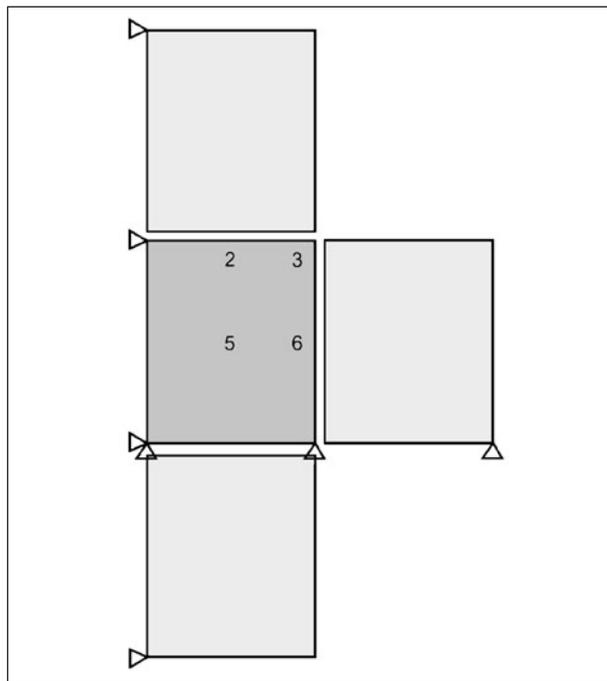


Bild 6-46: Von weiteren Betrachtungen ausgeschlossenes 4-Plattensystem mit untersuchten Lastpositionen

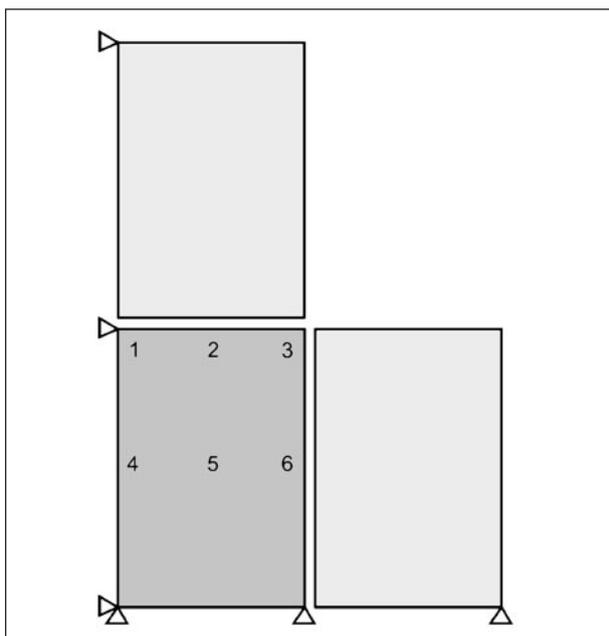


Bild 6-45: Von weiteren Betrachtungen ausgeschlossenes 3-Plattensystem mit untersuchten Lastpositionen

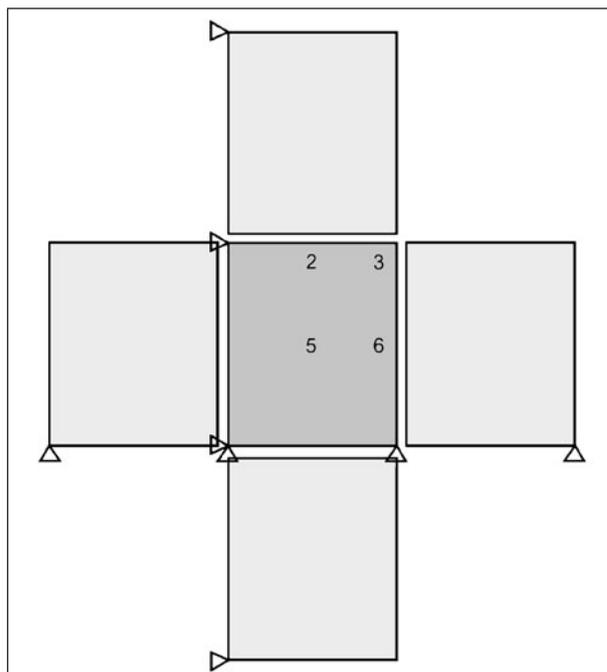


Bild 6-47: Von weiteren Betrachtungen ausgeschlossenes 5-Plattensystem mit untersuchten Lastpositionen

## 6.10 Verifikation und Kalibrierung des FE-Modells

### 6.10.1 Verifikation der Modellierung und Diskretisierung der Platte anhand der Verformung unter Temperaturlast

Bei zu grober Diskretisierung und unter Verwendung von Volumenelementen kann es zu Locking-Effekten kommen. Locking-Effekte sind Versteifungseffekte die aus der Modellierung heraus rühren. Zweidimensionale Plattenelemente (Bild 6-48) weisen dieses Verhalten für Biegebeanspruchungen nicht auf. Ein Vergleich der Verformungen infolge Temperaturlast des dreidimensionalen Plattenmodells (Bild 6-49) mit den Verformungen infolge Temperaturlast einer zweidimensional modellierten Platte infolge Temperaturlast gibt Rückschlüsse darüber, ob Locking-Effekte auftreten.

Es wird je eine Platte mit den Parametern aus Tabelle 6-21 für den Locking-Test verwendet.

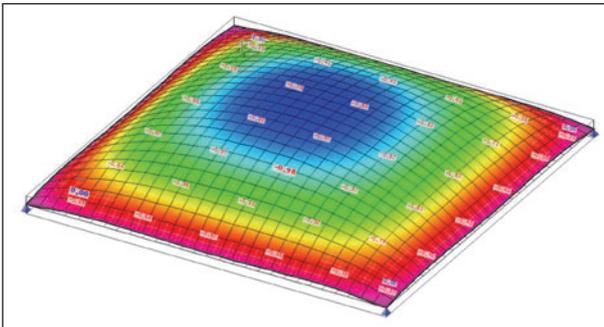


Bild 6-48: Verformungsbild des zweidimensionalen Modells

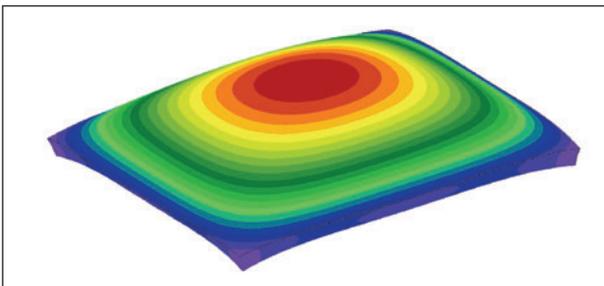


Bild 6-49: Verformungsbild des dreidimensionalen Modells

Länge [mm]	5.500
Breite [mm]	5.500
Höhe [mm]	270
Elastizitätsmodul [N/m <sup>2</sup> ]	39.000
Querdehnzahl [-]	0,2

Tab. 6-21: Parameter-Platte für Locking-Test

Die Berechnung des zweidimensionalen Modells wurde mit dem Programm DIE-Baustatik durchgeführt. Es ergibt sich eine maximale Aufwölbung von 0,98 mm.

Die Berechnung des dreidimensionalen Modells mit CalculiX ergibt eine maximale Aufwölbung von 1,01 mm.

Es treten keine Locking-Effekte mit der gewählten Diskretisierung auf.

### 6.10.2 Verifikation der Modellierung und Diskretisierung der Anker und Dübel anhand der Querkraftübertragung und dem Wirksamkeitsindex

Die Wirksamkeit der Dübel bezüglich der Querkraftübertragung wird gewöhnlich über den Wirksamkeitsindex abgeschätzt. Dieser ist definiert mit

$$W = \frac{2 \cdot d_{unb}}{d_d + d_{unb}} \quad (6-20)$$

W      Wirksamkeitsindex

$d_b$     Deflexion der belasteten Platte an der Fuge

$d_{unb}$     Deflexion der unbelasteten Platte an der Fuge

In der Praxis liegt der Wirksamkeitsindex im Bereich zwischen 0,8 und 0,95. Die berechneten vertikalen Plattenverformungen unter randnahen Radlasten können also für die Kalibrierung der Material- und Querschnittswerte benutzt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Anker an der Längsfuge eine Fugenöffnung verhindern. Damit findet eine Querkraftübertragung durch die Rissverzahnung statt. Der Wirksamkeitsindex ist deshalb an der Längsfuge ähnlich hoch wie an der Querfuge. Da die Rissverzahnung im Berechnungsmodell nicht abgebildet wird, muss die entsprechende Wirkung über zusätzliche Balkenelemente simuliert werden. Im Modell werden deshalb die Anker in ähnlichem Abstand wie die Dübel angeordnet.

Die Momentenübertragung in der Fuge erfolgt unplanmäßig und ist deshalb schwer zu quantifizieren. Im Modell muss sichergestellt sein, dass die Momentenübertragung nicht zu hoch kalkuliert wird.

In der Querfuge können Biegemomente nur über die Biegung der Dübel übertragen werden. Damit ergibt sich das maximale Biegemoment zu

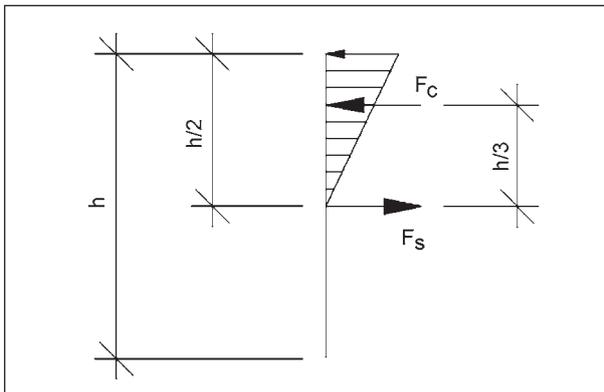


Bild 6-50: Kräfte in der Längsfuge

$$m_{max} = n_D \cdot W_D \cdot f_s \quad (6-21)$$

$m_{max}$  Biegemoment pro m

$n_D$  Anzahl der Dübel pro m

$W_D$  Widerstandmoment eines Dübels

$f_s$  Festigkeit der Dübel (Fließgrenze)

In der Längsfuge wird praktisch ein Stahlbetonquerschnitt realisiert. Damit ergibt sich bei elastischem Materialverhalten ein Kräftegleichgewicht nach Bild 6-50.

Das maximale Biegemoment ergibt sich danach zu:

$$m_{max} = n_A \cdot A_A \cdot f_s \cdot \frac{h}{3} \quad (6-22)$$

$n_A$  Anzahl der Anker pro m

$A_A$  Querschnitt eines Ankers

$h$  Deckendicke

Das für die Simulation erstellte Finite-Elemente-Modell muss die Anker und Dübelwirkung abbilden können. Die Verifikation erfolgt mithilfe des Wirksamkeitsindex. Es wird eine Radlast an der Längsfuge einer Platte aufgebracht und die Einsenkung der belasteten Platte mit der Einsenkung der unbelasteten Nachbarplatte verglichen (Bild 6-51 und 6-52) und der Wirksamkeitsindex berechnet.

In der Simulation wurde die Radlast auf die rechte mittlere Platte aufgebracht. Es ist an den Verformungsbildern gut zu erkennen, dass die Nachbarplatte im Simulationsmodell sich sehr gut mitverformt und somit Querkräfte sowie Momente abträgt. Der im Lasteintragsbereich gemittelte Wirksamkeitsindex beträgt für die Simulation ca. 0.95 und entspricht somit den in der Praxis ermittelten Werten.

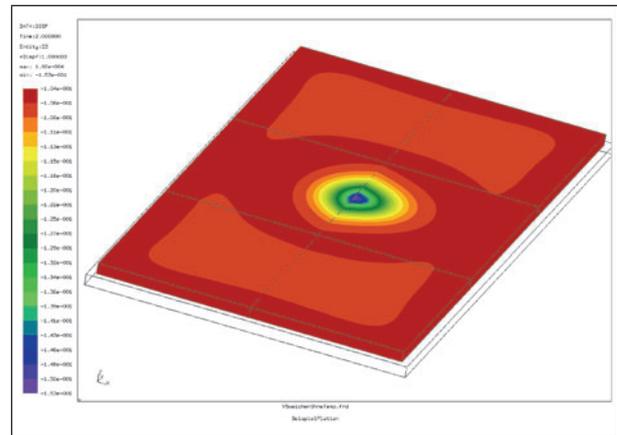


Bild 6-51: Verifikation der Wirksamkeit der Anker und Dübel, Einsenkung der Platten infolge Eigengewicht und Radlast, Ansicht von oben ohne überhöhte Darstellung der Verformungen

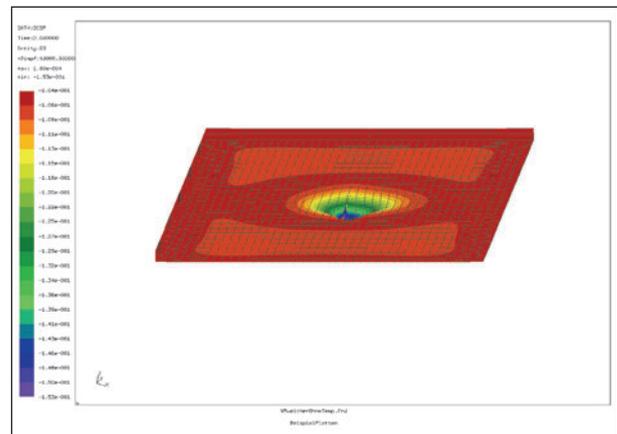


Bild 6-52: Verifikation der Wirksamkeit der Anker und Dübel, Einsenkung der Platten infolge Eigengewicht und Radlast, Ansicht von unten mit 10.000-fach überhöhter Darstellung der Verformungen

### 6.10.3 Kalibrierung der Modellierung des Untergrundes anhand der Randeinsenkungen

Die Modellierung des Untergrundes wird in der Art kalibriert, dass die berechneten Einsenkungen der Platte in den Untergrund plausible Werte annehmen. Die numerischen Untersuchungen erfolgen am 4-Plattensystem (Bild 6-53 bis 6-55).

Für die Kalibrierung wurde der Untergrund mit den in Tabelle 6-22 aufgeführten Elastizitätsmoduln modelliert und die unter Radlasten von 50 kN auftretenden Einsenkungen ausgewertet.

Entsprechend den Ergebnissen wurden die Materialparameter 75 kN/m<sup>2</sup> (STS), 100 kN/m<sup>2</sup> (ATS) und 125 kN/m<sup>2</sup> (HGT) für den Untergrund festgelegt.

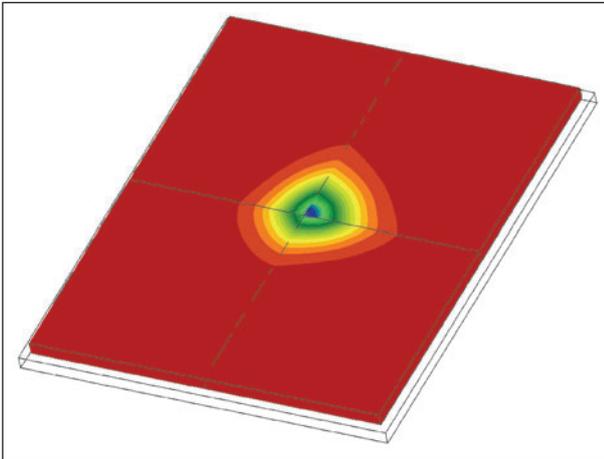


Bild 6-53: Berechnungen zur Kalibrierung des Untergrundes, Lastfall Ecke

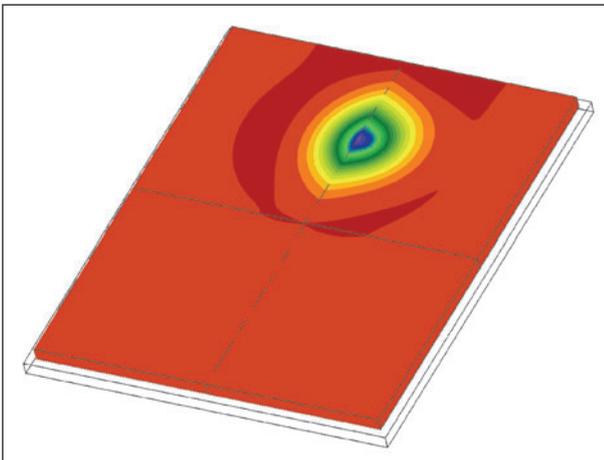


Bild 6-54: Berechnungen zur Kalibrierung des Untergrundes, Lastfall Rand

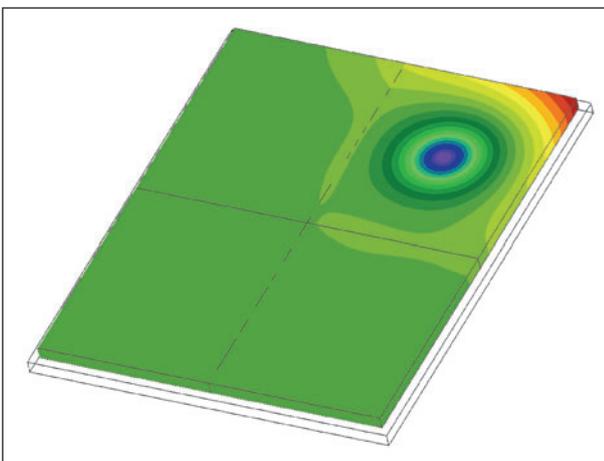


Bild 6-55: Berechnungen zur Kalibrierung des Untergrundes, Lastfall Mitte

E-Modul Tragschicht [kN/m <sup>2</sup> ]	Lastposition Innenplatten		
	Mitte	Rand	Ecke
50	0,056	0,078	0,139
75	0,046	0,062	0,107
100	0,040	0,053	0,089
125	0,035	0,047	0,078
200	0,028	0,037	0,059
300	0,023	0,029	0,047
400	0,020	0,025	0,040
700	0,015	0,019	0,029

Tab. 6-22: Vergleichsrechnungen zur Kalibrierung des Untergrundes

## 6.11 Einbindung der FEM-Berechnung in das Dimensionierungssystem AWDSTAKO

### 6.11.1 Grundsätze

Für die Integration der FEM-Berechnung in das Dimensionierungssystem wurden folgende Grundsätze formuliert:

- Das Dimensionierungsverfahren bleibt zunächst unverändert. Die FEM-Berechnung ersetzt nur die bisherige Spannungsberechnung nach WESTERGAARD und EISENMANN.
- Für den Anwender wird die Benutzung des Programms nicht komplizierter.
- Der Aufbau des FEM-Modells erfolgt programmintern. Ein Zugriff des Anwenders auf das FEM-Modell wird nicht ermöglicht.
- Die Auswertung der Ergebnisse der FEM-Analyse erfolgt programmintern.

### 6.11.2 Neuer Iterationsalgorithmus

Weil die FEM-Berechnungen erhebliche Rechenzeit beanspruchen, ist es anzustreben, die Anzahl der im Zuge einer Dimensionierung notwendigen Aufrufe der FEM-Routine möglichst gering zu halten. Dazu wird der Iterationsalgorithmus optimiert. Damit die Iteration bereits in der Nähe des Ergebniswertes starten kann, wird zunächst eine traditionelle Dimensionierung mit den Formeln von

WESTERGAARD und EISENMANN durchgeführt. Der so berechnete Dickenwert  $h_1$  dient als Startwert für die Iteration mit dem FEM-basierten Verfahren.

Weiter wird eine Differenzspannung  $D_s$  ermittelt, um die sich die Spannung bei einem Iterationsschritt  $Dh$  (5 mm) mindestens ändert. Dazu werden die Spannungen mit den Formeln nach WESTERGAARD und EISENMANN für die Deckendicke  $h_1$  und  $h_1 + Dh$  durchgeführt. Weil die Differenzspannung für die FEM-gestützte Berechnung geringfügig abweichen kann und auch in jedem Iterationsschritt leicht variiert, wird die ermittelte Differenzspannung nur mit 75 % ihres berechneten Wertes angesetzt. Damit ist sichergestellt, dass die Iteration nicht zu früh abbricht.

Die Iteration der Deckendicke erfolgt für den erfahrungsgemäß maßgebenden Nachweisfall (meistens Rad Mitte Querfuge, Ermüdung). Nachdem die notwendige Deckendicke für diesen Nachweisfall gefunden wurde, wird anschließend überprüft, ob auch die anderen Nachweise erfüllt sind. Ggf. ist die Iteration fortzusetzen.

Im ersten Iterationsschritt wird mit  $h_1$  durch das FEM-System eine Spannung  $s_1$  berechnet. Diese wird mit der Festigkeit  $f_{ct}$  verglichen. Es ergeben sich vier mögliche Fälle: die Iterationsfälle 1, 2, 3 und 4.

Iterationsfall 1 (Bild 6-56) bedeutet, dass der Nachweis erfüllt ist, bei einer Reduzierung der Deckendicke um  $Dh$  aber auf jeden Fall nicht mehr erfüllt sein wird.

$$\Rightarrow h = h_1$$

$h$  gesuchte Deckendicke

Iterationsfall 2 (Bild 6-57) bedeutet, dass der Nachweis nicht erfüllt ist, bei einer Erhöhung der Deckendicke um  $Dh$  aber auf jeden Fall erfüllt sein wird.

$$\Rightarrow h = h_1 + Dh$$

Iterationsfall 3 (Bild 6-58) bedeutet, dass der Nachweis erfüllt ist und bei einer Reduzierung der Deckendicke um  $Dh$  immer noch erfüllt sein wird.

$$\Rightarrow h_1 \tau h_1 - ((f_{ct} - s_1) / D_s) \cdot Dh$$

$\Rightarrow$  Fortsetzung der Iteration

$$1. (f_{ct} - D_s) < s_1 < f_{ct}$$

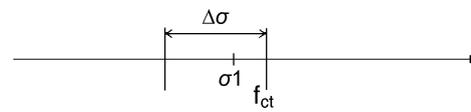


Bild 6-56: Iterationsfall 1

$$2. f_{ct} < s_1 < (f_{ct} + D_s)$$



Bild 6-57: Iterationsfall 2

$$3. s_1 < (f_{ct} - D_s)$$

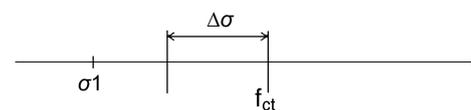


Bild 6-58: Iterationsfall 3

$$4. (f_{ct} + D_s) < s_1$$

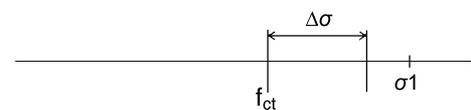


Bild 6-59: Iterationsfall 4

Iterationsfall 4 (Bild 6-59) bedeutet, dass der Nachweis nicht erfüllt ist und bei einer Erhöhung der Deckendicke um  $Dh$  immer noch nicht erfüllt sein wird.

$$\Rightarrow h_1 \tau h_1 + ((s_1 - f_{ct}) / D_s) \cdot Dh$$

$\Rightarrow$  Fortsetzung der Iteration

Mit diesem Algorithmus wird die Anzahl der notwendigen FEM-Berechnungen drastisch reduziert.

### 6.11.3 Modifikationen bei der Berücksichtigung der Querkraftübertragung in den Fugen

In der aktuell gültigen Fassung der [RDO Beton 09] wird die Querkraftübertragung in den Längs- und Quertugen über Anpassungsfaktoren (Dübelfaktor  $mbD$ ) realisiert.

Das 9-Platten-FEM-Modell enthält bezüglich der Querkraftübertragung alle möglichen Plattenkombinationen. Der Nutzer kann also wählen ob die Standspur, ein Hauptfahrstreifen oder ein Nebenfahrstreifen dimensioniert werden soll. Im Zuge der Berechnungen werden die maximalen Spannungen an der für den Fahrstreifen maßgebenden Platte berechnet. Die Querkraftübertragung wird dabei automatisch in der korrekten Weise (frei, verankert, verdübelt) berücksichtigt. Der Dübelfaktor entfällt also. Programmintern wird überprüft ob die Berechnung am 9-Platten-Modell erfolgen muss oder ob ein reduziertes Modell (siehe Kapitel 6.9) äquivalente Ergebnisse liefert.

Für die Berechnung wird jeweils das bezüglich der Rechenzeit günstigste Modell gewählt.

#### 6.11.4 Programmtechnische Umsetzung

Die Anwendung des Dimensionierungssystems soll für den Anwender weiterhin in gewohnter Art und Weise erfolgen. Deshalb wurde die Verbindung zwischen dem bisherigen System und der Spannungsberechnung mittels FEM-Rechenkern vollständig in die Programmlogik integriert.

An dem bisherigen Dimensionierungsprogramm konnten die durch die Umstellung erforderlichen Änderungen für den Nutzer auf wenige Punkte beschränkt werden.

Bei der Eingabe kann der Nutzer nun bei mehreren Fahrstreifen deren Breite getrennt vorgeben (siehe Bild 6-60).

Die Ausgabe wurde um eine Grafik ergänzt, die den gewählten Aufbau und die Ergebnisse der Berechnung darstellt. Für die Integration in die Programmlogik wurden jeweils Prä- und Postprozessoren erstellt, die den Aufbau des FEM-Modells auf Basis der in AWDSTAKO ausgewählten Eingangsgrößen und auch die anschließende Auswertung der Ergebnisse übernehmen.

Der Präprozessor ist an den gewählten Solver CalculiX angepasst und übernimmt die Aufgabe die vom Programm AWDSTAKO übergebenen Daten bezüglich der Einheiten als auch der Formate an die Erfordernisse des Solvers anzupassen. Außerdem enthält der Präprozessor einem flexiblen Modellgenerator, der anhand der ausgewählten Geometrie- und Materialeigenschaften ein passendes Modell für die FE-Berechnung erstellt.

Bild 6-60: Eingabemöglichkeit im Programm [AWDSTAKO] für die Plattenbreiten

Die Modellierung erfolgt durch erstellen der Platten und des Untergrundes mit den entsprechenden Abmessungen. Anschließend werden sowohl die Elemente dafür als auch die Knotenstruktur automatisiert erzeugt. Den Elementen werden dabei die materialspezifischen Eigenschaften zugewiesen. Anschließend erfolgt die Modellierung der Anker und Dübel. Diese werden ebenfalls als Elemente hinzugefügt und in die Kontenlisten eingetragen.

Zum Start der Berechnung wird das Modell in dem für CalculiX erforderlichen Format an den Solver übergeben.

Nach Abschluss der Berechnungen übernimmt der Postprozessor die Ergebnisdaten vom Solver und fügt diese in das vom Präprozessor erzeugte Modell ein. Somit kann eine direkte Analyse und Auswertung der berechneten Spannungen aller Knoten erfolgen. Dabei werden auch jeweils die Hauptspannungen ermittelt. Die Werte der maßgebenden Nachweispunkte werden zum Vergleich mit den zulässigen Spannungen an das Programm AWDSTAKO zur Auswertung übergeben.

Im Rahmen dieses Projektes wird die Anbindung des Solvers an das bestehende Programm AWDSTAKO über eine externe Schnittstelle gelöst (Bild 6-61). Diese externe Schnittstelle wird als dynamisches Link-Modul ausgeführt und enthält den auf den Solver zugeschnittenen Prä- und Postprozes-

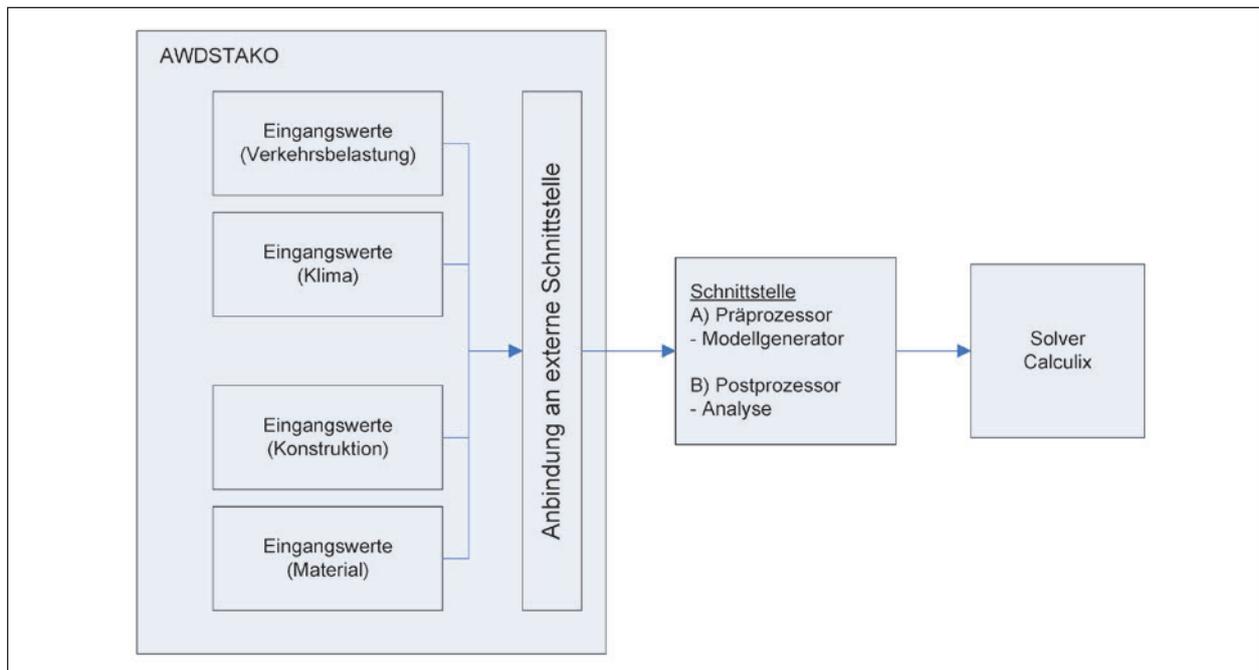


Bild 6-61: Schematische Darstellung der Schnittstelle zwischen [AWDSTAKO] und dem Solver CalculiX

sor. Durch dieses modulare Konzept kann bei Bedarf auch ein Präprozessor für andere Solver eingebunden werden.

## 7 Dimensionierung mit probabilistischen Verfahren und der FEM

Soll eine Dimensionierung mit probabilistischen Verfahren und unter Nutzung der FEM durchgeführt werden, so bedeutet dies in der Praxis die Kombination zweier aufwendiger numerischer Verfahren. Grundsätzlich ist es möglich, die in [FE 04.218/2008/ARB] beschriebene Methodik der probabilistischen Berechnung auch mit der FEM-Methode durchzuführen. Der einzige Unterschied liegt darin, dass die Spannungen nicht mehr mit den Formeln nach WESTERGAARD und EISENMANN, sondern mit der FEM berechnet werden. Dies bedeutet aber, dass die FEM-Berechnung im Zuge der numerischen Integration vielfach ausgeführt werden muss. Damit ergeben sich sehr lange Rechenzeiten.

Eine Möglichkeit zur Lösung dieser Problematik bietet das Antwortflächenverfahren (siehe z. B. [CURBACH 2003; SCHUELLER 1996]).

Die Grundidee des Antwortflächenverfahrens besteht darin, den Zusammenhang zwischen den Ein-

gangsgrößen und dem Berechnungsergebnis (der Systemantwort) mit einem einfachen funktionalen Ansatz zu beschreiben. Die unbekannte Grenzzustandsfunktion wird also durch eine genäherte Funktion ersetzt.

$$G(X) = 0 \rightarrow \tilde{G}(X) = 0 \quad (7-1)$$

$G$  exakte Grenzzustandsfunktion (unbekannt)

$\tilde{G}$  genäherte Grenzzustandsfunktion (Antwortfläche)

Die Näherungslösung ersetzt also das FEM-Modell. Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit kann mit den Verfahren nach [FE 04.218/2008/ARB] erfolgen ohne die FEM-Berechnungen im Zuge der numerischen Integration durchführen zu müssen. Es ist offenkundig, dass bei einer komplizierten Form der Grenzzustandsfunktion eine gute Näherung nur in Teilbereichen möglich ist. Dies ist für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit aber auch ausreichend. Da nur ein bestimmter Bereich des Parametervektors, nämlich der Bereich um den Dimensionierungspunkt, signifikante Beiträge zur Ausfallwahrscheinlichkeit liefert, ist es ausreichend, in diesem Gebiet eine gute Näherung zu erzielen. Damit ergibt sich die Notwendigkeit, den Dimensionierungspunkt iterativ zu bestimmen. Einen brauchbaren Algorithmus hierfür gibt BUCHER an [BUCHER 1990], siehe auch [CURBACH 2003].

Als funktionaler Ansatz für die Systemantwort der Betonplatte ist ein Polynom 2. Grades geeignet:

$$\tilde{g}(X) = a + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i^2 \quad (7-2)$$

Werden nur die vier wichtigsten Zufallsgrößen entsprechend [FE 04.218/2008/ARB] berücksichtigt, so gilt  $n = 4$ . Auch wenn die Grenzzustandsfunktion unbekannt ist, kann angenommen werden, dass der Einfluss der Zufallsgröße Betonfestigkeit nur linear ist. Der entsprechende Koeffizient für das quadratische Glied kann also zu null gesetzt werden. Damit sind noch acht Koeffizienten zu bestimmen. Dies ist möglich, indem mit der FE-Methode für acht Suchpunkte  $X$  die zugehörigen Werte der Antwortfläche berechnet werden. Für eine sinnvolle Festlegung der Suchpunkte sind in [CURBACH 2003] Hinweise gegeben. Das so gewonnene Gleichungssystem kann mit geeigneten Methoden gelöst werden und liefert die Werte für die Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$ . Es ist auch möglich, durch eine größere Anzahl an Suchpunkten ein überbestimmtes Gleichungssystem zu erzeugen. Die Performance des Verfahrens kann damit möglicherweise verbessert werden. Im ersten Iterationsschritt ist dies allerdings schwierig, weil noch keine geeigneten Schätzwerte für die numerische Lösung des Gleichungssystems zur Verfügung stehen.

Das Antwortflächenverfahren ermöglicht eine deutliche Reduktion der Anzahl der im Zuge einer probabilistischen Berechnung notwendigen Aufrufe der FEM-Routine. Für die Bestimmung der Antwortfläche sind allerdings auch einige FEM-Berechnungen notwendig. Die Kombination der FEM-Methode mit der probabilistischen Berechnung führt also in jedem Fall zu stark erhöhten Rechenzeiten.

## 8 Spezielle Untersuchungsergebnisse

### 8.1 Untersuchungsergebnisse an Einzelplatten

Das erarbeitete Finite-Elemente-Modell ermöglicht nun die Untersuchung von real auftretenden, durch Erfahrungswerte nicht abgedeckten, Lastfällen und Phänomenen.

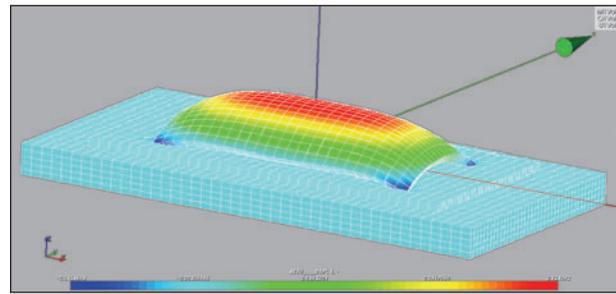


Bild 8-1: Verformung einer Platte mit kritischer Länge unter Temperatur und Eigenlast

#### 8.1.1 Nachrechnung der kritischen Länge

Die FEM-Methode bietet die Möglichkeit einer kritischen Überprüfung der bisher verwendeten Formelansätze.

Um die in den [RDO Beton 09] angegebenen Formeln für die kritische Länge zu überprüfen, wurde mit dem unter Kapitel 6.3.1 beschriebenen FEM-Modell eine Platte berechnet, deren Länge exakt einer vorab berechneten kritischen Länge entsprach. Die für die Berechnung der kritischen Länge angesetzten Parameter (Plattendicke, Materialwerte, Temperaturgradient) wurden auch für das FEM-Modell verwendet.

Die durch die FEM-Berechnung ermittelte Plattenverformung zeigt tatsächlich eine leichte Absenkung in Plattenmitte (Bild 8-1). Eine Auflagerung auf den Untergrund gibt es aber nur am Plattenrand. In den übrigen Bereichen wird die Auflagerung durch die Aufwölbung in Querrichtung verhindert.

Weil die Berechnung nach [RDO Beton 09] für den Plattenrand durchgeführt wird, kann die Formel als bestätigt gelten.

#### 8.1.2 Berechnung einer Platte mit nicht-linearem Temperaturgradienten

An den Betonplatten der Autobahnen sind vereinzelt Eckabbrüche (Bild 8-2) zu beobachten. Örtlich treten diese Schäden gehäuft auf.

Berechnungen nach der Plattentheorie, aber auch mit FEM-Modellen liefern zunächst keine Erklärung für diese Schadensbilder. Die berechneten Spannungen im Bruchbereich erreichen nicht die Werte der Betonfestigkeit.

Bei der Sanierung der Schäden fiel auf, dass in jedem Fall horizontale Risse am Plattenrand zu beobachten waren (Bild 8-3). Das Widerstandsmoment



Bild 8-2: Eckabbruch an einer Betonfahrbahnplatte



Bild 8-3: Horizontaler Riss am Plattenrand

des Querschnittes wurde dadurch entscheidend vermindert. Besonders tiefgehend waren die Risse in den Eckbereichen. Der Eckabbruch wird dadurch unvermeidlich.

Berechnungen mit dem FEM-Volumenmodell konnten zeigen, dass die Risse mit hoher Wahrscheinlichkeit infolge schnell wechselnder Temperaturen entstanden sind.

Dazu wurden Temperaturgradienten untersucht, welche sich im Querschnitt umkehren (Bild 8-4).

Solche Temperaturverläufe entstehen z. B. an heißen Sommertagen mit plötzlicher Abkühlung in den Abendstunden (Gewitter). Die Gradientenumkehrung führt dazu, dass sich für die oberen und unteren Plattenbereiche gegensätzlich Verformungsfiguren (Aufschüsselung, Aufwölbung) ergeben. Dies führt zu vertikalen Zugspannungen an den Plattenrändern.

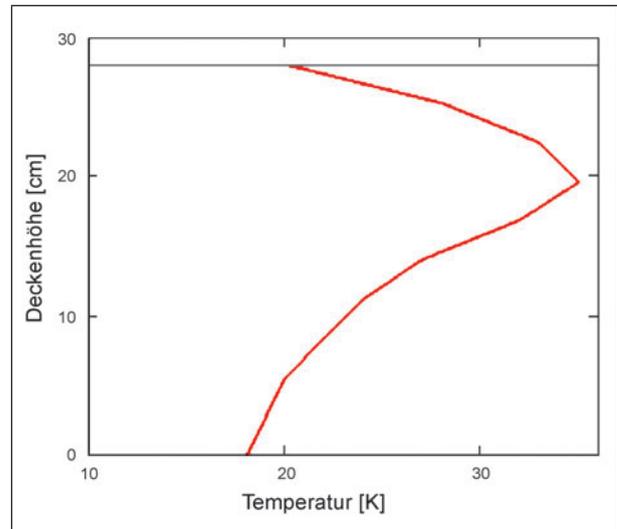


Bild 8-4: Temperaturverlauf mit Gradientenumkehrung über die Deckendicke

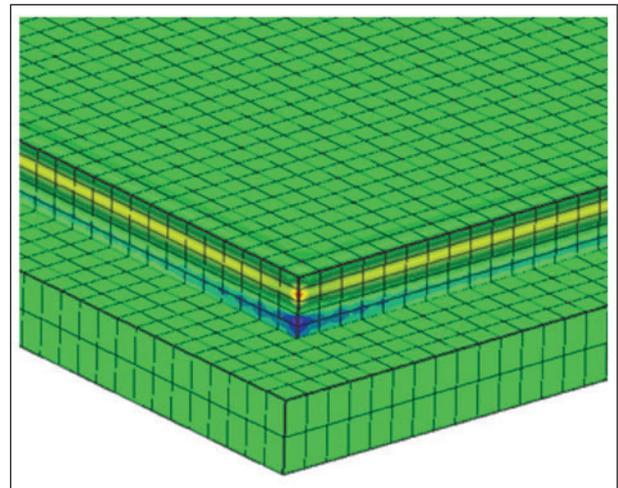


Bild 8-5: Vertikalspannungen an der Plattenecke (Gelb/Rot = Zugspannungen)

Mit den Berechnungen am FEM-Volumenmodell konnten diese Spannungen quantifiziert werden (Bild 8-5).

Es zeigte sich, dass die Spannungen unter ungünstigen Bedingungen die Betonfestigkeit überschreiten können.

Um den Verlauf des Temperaturgradienten modellieren zu können, ist eine feine Elementierung der Betonplatte notwendig. Ein aus 2D-Elementen aufgebautes FEM-Modell ist für derartige Untersuchungen nicht geeignet, weil mit diesen Modellen nur lineare Temperaturverläufe modelliert werden können.

## 8.2 Tastrechnungen mit FEM zum Spaltzug

### 8.2.1 Modellierung des Spaltzugversuches

Das entscheidende Festigkeitskriterium für die Dimensionierung ist die Zugfestigkeit des Betons. Für die Baupraxis ergibt sich dadurch die Notwendigkeit diesen Materialparameter mit einer praxistauglichen Versuchsanordnung zu bestimmen.

In der Praxis hat sich dabei entsprechend [RDO Beton 09] der Spaltzugversuch durchgesetzt. Dieser wird standardmäßig zur Bestimmung der Betonzugfestigkeit angewendet und ist für den Betonstraßenbau entsprechend genormt. (Auf die komplexe Problematik der Bestimmung der Betonzugfestigkeit wird in [FE 04.433/2009/DGB] eingegangen; siehe auch [MAL 2010]).

Beim Spaltzugversuch wird die auf den Probekörper aufgebrachte Druckkraft gemessen. Die zugehörige maßgebende Zugspannung im Probekörper wird nach [AL Sp-Beton 06] mit der folgenden Formel berechnet:

$$\sigma_{ct} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot d \cdot h} \quad (8-1)$$

F eingetragene Druckkraft

$\sigma_{ct}$  Zugspannung

d Durchmesser des Probekörpers

h Höhe des Probekörpers

Für die folgenden Tastrechnungen wurde der Spaltzugversuch idealisiert nachmodelliert (Bilder 8-6 bis 8-8). Hierfür wurde ein idealer Zylinder mit 100 mm

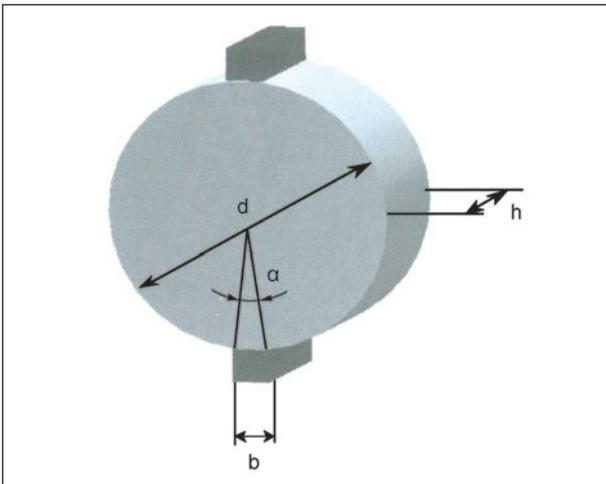


Bild 8-6: Schematische Darstellung des Spaltzugversuches (aus [AL Sp-Beton 06])

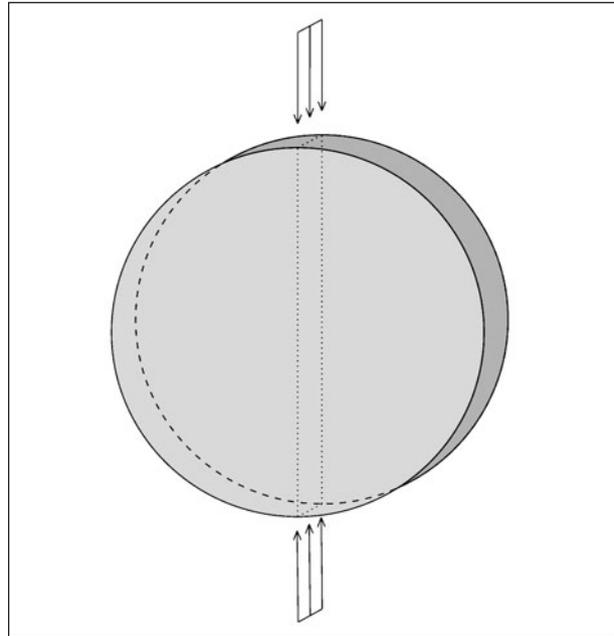


Bild 8-7: Idealisierter Spaltzug Skizze

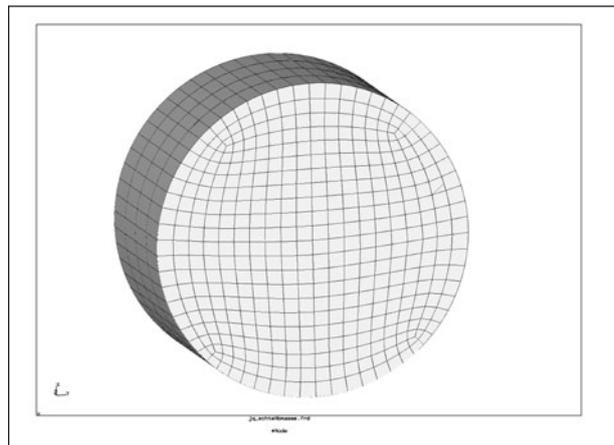


Bild 8-8: Finite-Elemente-Modell Spaltzug Diskretisierung

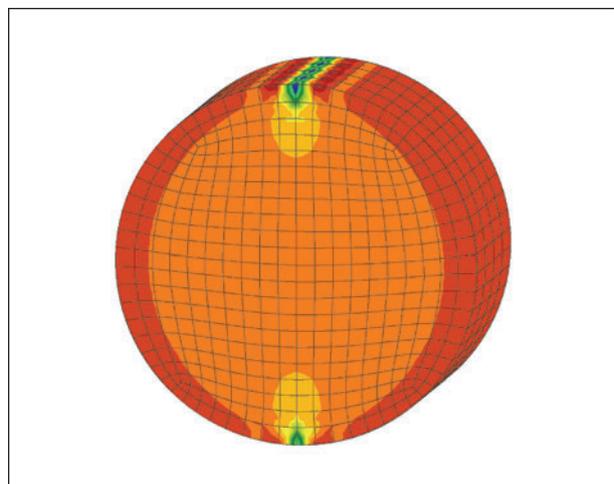


Bild 8-9: Simulation des Spaltzugversuches mit Bruchlast für eine Spaltzugfestigkeit von 4 kN/m<sup>2</sup>

Durchmesser sowie 50 mm Länge unter Verwendung von 20-Knoten-Brickelementen modelliert und mit einer idealen Streckenlast, die der eingeleiteten Kraft bei einer Spaltzugfestigkeit von  $4 \text{ N/mm}^2$  entspricht, beaufschlagt (Bild 8-9).

### 8.2.2 Vergleich der Spaltzugfestigkeit mit den Hauptzugspannungen in der Simulation

Die Berechnung der Spaltzugfestigkeit aus der Last erfolgt für einen idealisierten zweiachsialen Spannungszustand, d. h. es gibt keine Querdehnung in Längsrichtung des Zylinders. Für diese Randbedingungen liefert die Simulation als maßgebende Spannung (unter der idealisierten Spaltzuglast für  $4 \text{ N/mm}^2$  den) den Wert  $4,08 \text{ N/m}^2$  (Bild 8-10). Die Simulation bildet den idealisierten Versuch sehr gut ab.

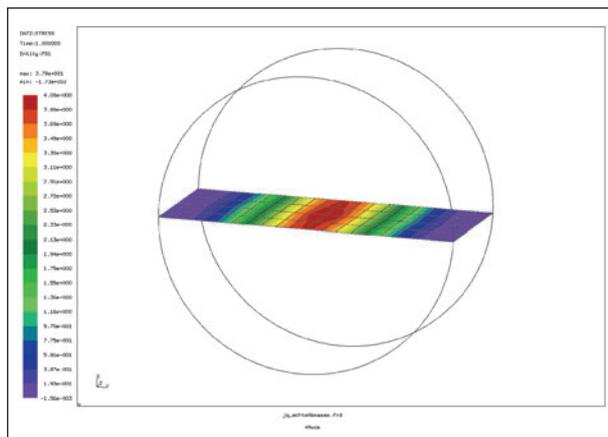


Bild 8-10: Schnitt durch Zylinder mit erster Hauptspannung für idealisierten Spaltzugeversuch ohne Querdehnung in Längsrichtung

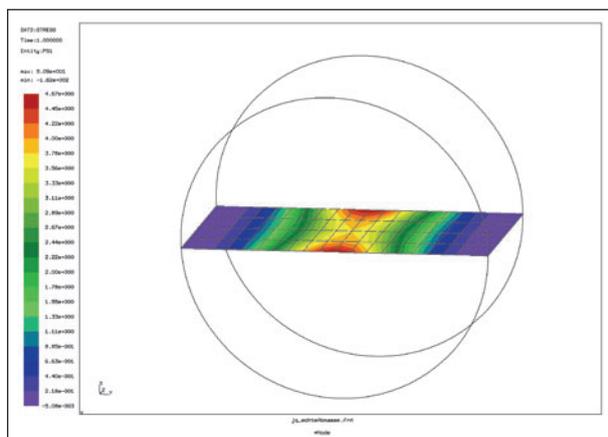


Bild 8-11: Schnitt durch Zylinder mit erster Hauptspannung für idealisierten Spaltzugeversuch mit Querdehnung in Längsrichtung

In situ treten Querdehnungen in Längsrichtung des Prüfzylinders auf. Werden die Randbedingungen des Modells entsprechend angepasst weist die Simulation erhöhte maßgebende Spannungen ( $4,67 \text{ N/m}^2$ ) infolge zusätzlicher Spannungskomponenten aus der Querdehnung in Längsrichtung auf (Bild 8-11).

Es besteht weiterer Forschungsbedarf bezüglich des Eingangs von Materialprüfgrößen in FE-Berechnungen. Das Vorgehen nach [RDO Beton 09] in Kombination mit der Finite-Elemente-Methode liegt jedoch auf der sicheren Seite.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

Die Verwendung der Finite-Elemente-Methode für die Berechnung von Straßen mit Betondecke ermöglicht eine realistischere Berechnung der Spannungs-Verzerrungszustände in der Betonfahrbahn. Im Ergebnis wird die Dimensionierung wirtschaftlicher und sicherer.

Die Nachweisformate, das Sicherheitskonzept und die Lastannahmen entsprechen weiterhin den [RDO Beton 09]. Damit ist die Kontinuität zur eingeführten Dimensionierungspraxis gewahrt.

Das etablierte FEM-Modell ist außerdem als Basismodell für die Analyse spezieller Problemstellungen im Betonstraßenbau geeignet (siehe z. B. Kapitel 8). Die erforderlichen Modifikationen und Erweiterungen sind mit einem skriptgesteuerten Modellaufbau realisierbar.

Das Konzept des Volumenmodells eröffnet darüber hinaus ein weit in die Zukunft reichendes Entwicklungspotenzial. Es ist möglich, kontinuierlich neue Forschungsergebnisse in das Modell zu integrieren, um aktuelle sowie zukünftige Forschungsfelder mit numerischen Untersuchungen zu ergänzen und voranzutreiben. Insbesondere seien hier innovative Oberflächen genannt, die neben guter Griffigkeit und Ebenheit auch erhöhte Lärminderungseigenschaften (akustisches Grinding, Prägebeton, offenporige Oberbetone) aufweisen. Die dabei ggf. zur Anwendung kommenden mehrschichtigen Aufbauten mit Oberbetonen, deren mechanische Eigenschaften sich durchaus signifikant von denen des Unterbetons unterscheiden können, sollten vor ihrer Anwendung numerisch mit der Finite-Elemente-Methode untersucht werden, um über Vergleichs-

rechnungen die neue Konstruktion hinsichtlich ihrer Tragfähigkeit bewerten zu können.

Konkret werden für die weitere Entwicklung folgende Schwerpunkte gesehen:

#### 1. Verbesserung der Performance

Die Rechenzeiten für eine Dimensionierung liegen deutlich über den bisher aus dem System AWD-STAKO gewohnten Werten. Ob die Akzeptanz des Systems dadurch tatsächlich beeinträchtigt wird, ist noch nicht mit Sicherheit zu sagen. Die allgemeine Entwicklung der Rechentechnik wird automatisch zu einer Verkürzung der Rechenzeiten führen. Es besteht außerdem die Möglichkeit, den Berechnungsprozess durch den parallelen Start mehrerer Berechnungsroutinen auf unterschiedlichen Prozessorkernen merklich zu beschleunigen.

Verschiedene Parameter des Modelles sowie des Berechnungsalgorithmus besitzen ebenfalls bezüglich der Rechenzeit ein Optimierungspotenzial.

#### 2. Verwendung fortgeschrittener Materialgesetze

Die Finite-Elemente-Methode bietet die Möglichkeit, das Materialverhalten des Betons detailliert zu beschreiben. Es ist bekannt, dass die Arbeitslinie des Betons in der Nähe der Rissinitialisierung (Festigkeitsgrenze) nicht mehr linear verläuft. Außerdem gibt es einen ausgedehnten Entfestigungsbereich jenseits der Erstrissbildung. Beides muss berücksichtigt werden, wenn der tatsächlich eintretende Bruch mit hinreichender Sicherheit vorausberechnet werden soll. Die Implementierung eines derartigen Materialgesetzes ist perspektivisch möglich.

Ein noch bedeutenderer Fortschritt kann erzielt werden, indem ein Materialgesetz implementiert wird, welches die Materialermüdung zutreffend beschreibt.

In jedem Fall ist die Verwendung derartig komplexer Materialgesetze mit einer deutlichen Erhöhung des Rechenaufwandes verbunden. Die Konvergenz der Berechnungen ist in vielen Fällen erst mit einer aufwendigen Kalibrierung verschiedener Parameter erreichbar.

#### 3. Verfeinerung der Elementierung

Prinzipiell kann das Modell ohne große Veränderungen auch feiner elementiert werden. Damit ließe sich eine Unterscheidung in Ober- und Unterbeton

realisieren. Dies geht selbstverständlich mit einer Erhöhung der Rechenzeit einher. Hier ist also jeweils eine Abwägung zwischen Aufwand und Nutzen zu treffen.

#### 4. Berücksichtigung von Scheibenkräften

Bei Temperaturerhöhung können sich die Quertugen zwischen den Platten schließen. Über die Fugenflanken werden dann Druckspannungen übertragen. Diese können dimensionierungsrelevante Größenordnungen erreichen. Der Kerbschnitt an den Fugen führt außerdem dazu, dass beträchtliche Versatzmomente auftreten.

Diese Effekte werden in der Dimensionierungspraxis bisher vernachlässigt.

Das FEM-Modell bietet die Möglichkeit, diese Spannungen hinreichend genau zu berechnen und eine Überlagerung mit den anderen Einwirkungen zu realisieren.

#### 5. Integration probabilistischer Verfahren

Eine direkte Verknüpfung der FEM-Berechnungen mit probabilistischen Verfahren erscheint für die nähere Zukunft als zu aufwendig.

Als pragmatische, aber wirksame Maßnahme kann eine Anpassung der Lastfaktoren auf Basis probabilistischer Berechnungen erfolgen.

#### 6. Nutzung neuer Techniken in der FEM

Die der FEM zugrundeliegende Theorie ist sehr umfangreich und wird ständig weiter entwickelt. Folglich sind auch in der Software regelmäßig entsprechende Neuerungen und Verbesserungen für die Modellbildung und Berechnung zu finden. Diese können kontinuierlich in das Dimensionierungsprogramm übernommen werden. Kurzfristig ist hier ein Schwerpunkt in der Verbesserung der Kontaktformulierung (Platte-Unterbau) zu sehen.

## Literatur

- [AL Sp-Beton 06], FGSV: Arbeitsanleitung zur Bestimmung der charakteristischen Spaltzugfestigkeit an Zylinderscheiben als Eingangsgröße in die Bemessung von Betondecken für Straßenverkehrsflächen. AL Sp-Beton 06, Ausgabe 2006
- [AWDSTAKO], AWDSTAKO: System und Programm zur Berechnung der Konstruktionsdicke unbewehrter Betondecken von Verkehrsflächen. Vers. 1.7
- [BUCHER 1990], BUCHER, C. G.: A fast and efficient response surface approach for structural reliability Problems. Structural Safety 7, 1990
- [Calc 2013], DHONDT, G.: CalculiX. FEM-Programm, Version 2.5, 2013
- [CURBACH 2003], CURBACH, M.; WEILAND, S.: Das Antwort-Flächen-Verfahren. Vortrag 1. Dresdner 1. Probabilistik Symposium, 2003
- [DIE 2012], DIE GmbH: DIE-Baustatik 1.92. Oberhausen, 2012
- [DIN 1045-1], DIN 1045: Tragwerke aus Beton-, Stahlbeton und Spannbeton; Teil 1: Bemessung und Konstruktion, Teil 2: Beton – Festlegung, Eigenschaften, Herstellung
- [DIN 1055-100]: Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept und Dimensionierungsregeln
- [EI 1979], EISENMANN, J.: Betonfahrbahnen. Verlag Ernst & Sohn, 1979
- [FA/KÜ/PI/TU 2001], FAHRMEIR, L.; KÜNSTLER, R.; PIGEOT, I.; TUTZ, G.: Statistik. Der Weg zur Datenanalyse. Springerverlag, 2001
- [FE 04.194/2004/AGB], VILLARET, St.; KAYSER, S.; KIEHNE, A.; PFEIFER, L.; RIWE, A.: Weiterentwicklung der Bemessungsmethoden für Verkehrsflächen – Teil Betonstraßen – Forschung Straßenbau und Straßenverkehrstechnik. Heft 976, Bonn, 2007
- [FE 04.197/2004/ARB], VILLARET, St.; KAYSER, S.; KIEHNE, A.; PFEIFER, L.; RIWE, A.: Grundlagen zur Erfassung der Belastung für die analytische Dimensionierung von Straßenbefestigungen – Teil Betonstraßen, Forschung Straßenbau und Straßenverkehrstechnik. Heft 1050, Bonn, 2010
- [FE 04.218/2008/ARB], VILLARET, St.; KIEHNE, A.; RIWE, A.: Probabilistische Verfahrensweise für die Dimensionierung von Fahrbahnbefestigungen – Teil Betondecken, Forschung Straßenbau und Straßenverkehrstechnik. Heft 1072, Bonn, 2012
- [FE 04.433/2009/DGB], VILLARET et al.: Grundlagen für eine vergleichende Bewertung der Restsubstanz von Fahrbahnbefestigungen in Betonbauweise nach mehrjähriger Verkehrsnutzung. Entwurf des Schlussberichtes, 2013
- [FE 08.160/2000/CRB], PFEIFER, L.; KIEHNE, A.; VILLARET, St.: Dimensionierungsverfahren für Betonoberbau – Forschung, Straßenbau und Straßenverkehrstechnik. Heft 856, Bonn, 2002
- [GOLDSCHMIDT 1990], GOLDSCHMIDT, J.: WESTERGAARDs Gleichungen nochmals analysiert. Straße 11/1990
- [HÄUßLER-COMBE 2005], HÄUßLER-COMBE, U.; PRÖCHTEL, P.: Ein dreidimensionales Stoffgesetz für Betone mitnormaler und hoher Festigkeit. Beton- und Stahlbetonbau 1/2005
- [HOLZAPFEL 2000], HOLZAPFEL, H.: Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering. WILEY, CHICHESTER et al., 2000
- [HUGHES 1978], HUGHES, Th.: Consistent linearization in mechanics of solids and structures. Computer & Structures, (8):391 397, 1978
- [INNO 2011], VILLARET, St.; KIEHNE, A.; MUSFELDT, K.; NIESSEN, J.; RIWE, A.: Forschungsprogramm Innovationsprogramm Straße „Entwicklung eines Verfahrens zur Ermittlung der strukturellen Substanz von Verkehrsflächen mit unbewehrter Betondecke“, 05/2011
- [MAL 2010], MALARICS, V.: Ermittlung der Betonzugfestigkeit aus dem Spaltzugversuch mit zylindrischen Betonproben. Dissertation Universität Karlsruhe, 2010
- [MC 2010]: Model Code 2010. Vol.1, federation internationale de beton (fib), 2010

- [MEHLHORN 1997], MEHLHORN, G.: Werkstoffe, Elastizitätstheorie. Ernst, Berlin, 1997
- [MOONEY 1940], MOONEY, M.: A theory of large elastic deformation. Journal of Applied Physics, 11(9):582, 1940
- [MÜLLER 2009], MÜLLER, H. S.; REINHARD, H. W.: Beton. Betonkalender 2009/1, Ernst & Sohn, Berlin
- [NUMRICH 2003], NUMRICH, R.: Modellierung des nichtlinear-elastischen Verformungsverhaltens von Tragschichten ohne Bindemittel. Dissertation TU Dresden 2003
- [OESER 2010], OESER, M.: Nichtlineare numerische Simulationsmodelle für Verkehrswegebefestigungen. Habilitation TU Dresden 2010
- [OZBOLT 2005], OZBOLT, J. et al.: Instationäres 3D Thermo-mechanisches Modell für Beton, Beton- und Stahlbetonbau. 1/2005
- [PFEI 1973], PFEIFER, L.: Zementbetonstraßen und -plätze auf starrer Tragschicht. Die Straße, Nr. 5, 6/73
- [PFEI 1986-87], PFEIFER, L.: Überarbeitung der Vorschriften für den Betonstraßenbau (Teil 1 bis 4). Die Straße 1986/87
- [PFEI/VI 2000-2010], PFEIFER, L.; VILLARET, St.: Verfahren und Dimensionierungsprogramm AWDSTAKO für Betondecken von Straßenverkehrsflächen – Verfahren nach PFEIFER/VILLARET
- [PI/RAY 1951], PICKETT, G.; RAY, G.: Influence Charts for Rigid Pavements. Transactions of ASCE 116, 1951
- [PÖLLING 2000], PÖLLING, R.: Eine praxisnahe schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen. Dissertation RU Bochum 2000
- [RDO Beton 09], FGSV: Richtlinien für die rechnerische Dimensionierung von Betondecken im Oberbau von Verkehrsflächen RDOBeton 09, Ausgabe 2009
- [RStO 12], FGSV: Richtlinien für die Standardisierung des Oberbaues von Verkehrsflächen, Ausgabe 2012
- [SCHUELLER 1996], SCHUELLER, G: Der Ingenieurbau. Teil Tragwerkszuverlässigkeit, Einwirkungen, Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1996
- [SCHÜTT 2005], SCHÜTT, J.: Ein inelastisches 3D-Versagensmodell für Beton und seine Finite-Element-Implementierung. Dissertation Uni Karlsruhe 2005
- [TEL/SUTH 1935-43], TELLER, L.; SUTHERLAND, E.: The Structural Design of Concrete Pavements. Public Roads 16 (1935), Nr. 8, 9 and 10; Public Roads 17 (1936), Nr. 7 and 8; Public Roads 24 (1943), Nr. 4 and 5
- [WEST 1926], WESTERGAARD, H.: Stresses in Concrete Pavements computed by Theoretical Analysis. Public Roads 7, Heft 2/1926
- [WERKMEISTER 2003], WERKMEISTER, S.: Plastisches Verformungsverhalten von Tragschichten ohne Bindemittel in Straßenbefestigungen. Dissertation TU Dresden 2003
- [WI 01.06.2012] Wikipedia: Newtonsche Gesetze. 01.06.2012
- [WI 25.05.2012] Wikipedia: Impulserhaltungssatz. 25.05.2012

## Bilder

- Bild 2-1: Systematik der Nachweisführung
- Bild 2-2: Einwirkendes Moment – Einflüsse aus Verkehr
- Bild 2-3: Einwirkendes Moment – Einflüsse aus klimatischen Bedingungen
- Bild 2-4: Aufnehmbares Moment – Einflüsse aus Materialeigenschaften
- Bild 2-5: Aufnehmbares Moment – Einflüsse aus Konstruktion
- Bild 2-6: Last-, Anpassungs- und Materialfaktoren
- Bild 2-7: Ermüdungskurven für Nachweisfälle an Quer- und Längsfuge
- Bild 2-8: Iterativer Rechenprozess zur Ermittlung der erforderlichen Deckendicke

- Bild 2-9: Lastfälle – Verfahren nach WESTERGAARD; die Lastfälle  $\sigma_{QM}$  und  $\sigma_{QE}$  werden nicht berücksichtigt, nur der Lastfall  $\sigma_{QR}$  wird in den [RDO Beton 09] betrachtet
- Bild 2-10: Ohne konkave Verformung – bei Erwärmung von oben
- Bild 2-11: Konkave Verformung bei Austrocknung (Schwinden) von oben → nicht voll reversibel
- Bild 2-12: Verhalten bei nachfolgender Erwärmung
- Bild 2-13: Definition des Temperaturgradienten in der Straße
- Bild 2-14: Einsenkung des Fugenrandes ohne Dübel
- Bild 2-15: Einsenkung des Fugenrandes ohne Dübel
- Bild 2-16: Einsenkung des Fugenrandes mit Dübel
- Bild 2-17: Einsenkung des Fugenrandes mit Dübel
- Bild 2-18: Behinderung der freien Plattenverformung im Dübelbereich
- Bild 2-19: Unterschiedliche Kraftübertragung am Plattenrand
- Bild 2-20: Ebene Platte
- Bild 2-21: Aufschlüsselung in einer Richtung
- Bild 2-22: Aufwölbung in einer Richtung
- Bild 3-1: Konfigurationen  $\Omega_0$  und  $\Omega$  eines Kontinuums  $B$  im  $\mathbb{R}^3$
- Bild 3-2: Größen und Grundgleichungen der klassischen Mechanik
- Bild 3-3: Deformation eines Vektors beim Übergang von  $\Omega_0$  zu  $\Omega$
- Bild 3-4: Infinitesimales Volumenelement
- Bild 3-5: Linearisierung
- Bild 3-6: Newton-Raphson-Verfahren
- Bild 3-7: Ablauf nichtlineare FEM-Berechnung
- Bild 4-1: Finite-Elemente-Modell und Finite-Elemente-Software
- Bild 5-1: Schematische Darstellung der Schnittstelle zwischen [AWDSTAKO] und FE-Rechenkernen
- Bild 5-2: Aufbau einer FE-Software
- Bild 5-3: Geschlossene theoretische FEM-Lösung
- Bild 5-4: Praktikable Lösung mit statischer FE-Berechnung
- Bild 6-1: 2D-Modell bestehend aus neun verbundenen Platten
- Bild 6-2: Verformungsbild des in Bild 6-1 gezeigten Modells unter Temperatur- und Radlast
- Bild 6-3: Volumenmodell mit zweischichtigem Unterbau
- Bild 6-4: Verformtes Volumenmodell mit zweischichtigem Unterbau
- Bild 6-5: Verformtes Modell mit Einzellast am Rand
- Bild 6-6: Verformtes Modell mit Einzellast in der Ecke
- Bild 6-7: Volumenmodell mit Stablagerung
- Bild 6-8: Zusammenhang Spannung – E-Modul für das Stabelement
- Bild 6-9: Volumenmodell mit Stäben als Koppel-elementen
- Bild 6-10: Ergebnisse der Serienrechnungen
- Bild 6-11: 20-Knoten-Brickelement
- Bild 6-12: Berechnete Spannungen bei verschiedenen feiner Elementierung
- Bild 6-13: 8-Knoten-Brickelement
- Bild 6-14: Modellierung Anker/Dübel
- Bild 6-15: Expansion eines 3-Knoten-Balkenelementes in ein 20-Knoten-Brickelement (aus [DHONDT 2013])
- Bild 6-16: Prinzipieller Verlauf der Pressung in der Kontaktfuge in Abhängigkeit von der Spaltgröße (aus [DHONDT 2013])
- Bild 6-17: Belastungsfläche für die Verkehrslast

- Bild 6-18: Gradientenwerte für verschiedene Deckendicken (Rot: quasi-dynamischer Lastfall; Blau: GZG; Grün: Ermüdungslastfall)
- Bild 6-19: Regressionsfunktion der Gradientenwerte für verschiedene Deckendicken (Rot: quasi-dynamischer Lastfall; Blau: GZG; Grün: Ermüdungslastfall)
- Bild 6-20: Cauchy-Spannungen am infinitesimalen Volumenelement
- Bild 6-21: Hydrostatische Last am infinitesimalen Volumenelement
- Bild 6-22: Hydrostatischer Spannungszustand am infinitesimalen Volumenelement
- Bild 6-23: Dreidimensionaler Spannungsgraph mit Raumdiagonale
- Bild 6-24: Ebener Spannungszustand
- Bild 6-25: Zweidimensionaler Hauptspannungszustand
- Bild 6-26: Mohr'scher Spannungskreis
- Bild 6-27: Dreidimensionaler Hauptspannungszustand
- Bild 6-28: Betonfestigkeit unter dreiachsiger Beanspruchung (aus [MÜLLER 2009])
- Bild 6-29: Einzelplatte mit negativem Temperaturgradient (400-fach überhöhte Deformation)
- Bild 6-30: Plattensystem mit negativem Temperaturgradient (1.000-fach überhöhte Deformation)
- Bild 6-31: Einzelplatte mit positivem Temperaturgradient (1.000-fach überhöhte Deformation)
- Bild 6-32: Plattensystem mit positivem Temperaturgradient (1.000-fach überhöhte Deformation)
- Bild 6-33: Lastpositionen auf einer Platte
- Bild 6-34: 9-Plattensystem mit untersuchten Lastpositionen
- Bild 6-35: 9-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Hauptfahrstreifen
- Bild 6-36: 9-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Nebenfahrstreifen
- Bild 6-37: 6-Plattensystem mit untersuchten Lastpositionen
- Bild 6-38: 6-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Hauptfahrstreifen
- Bild 6-39: 6-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Nebenfahrstreifen
- Bild 6-40: 4-Plattensystem mit untersuchten Lastpositionen
- Bild 6-41: 4-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Hauptfahrstreifen
- Bild 6-42: 4-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Nebenfahrstreifen
- Bild 6-43: Einzelplatte mit untersuchten Lastpositionen
- Bild 6-44: 1-Plattensystem mit reduzierten Lastpositionen für den Haupt- und Nebenfahrstreifen
- Bild 6-45: Von weiteren Betrachtungen ausgeschlossenes 3-Plattensystem mit untersuchten Lastpositionen
- Bild 6-46: Von weiteren Betrachtungen ausgeschlossenes 4-Plattensystem mit untersuchten Lastpositionen
- Bild 6-47: Von weiteren Betrachtungen ausgeschlossenes 5-Plattensystem mit untersuchten Lastpositionen
- Bild 6-48: Verformungsbild des zweidimensionalen Modells
- Bild 6-49: Verformungsbild des dreidimensionalen Modells
- Bild 6-50: Kräfte in der Längsfuge
- Bild 6-51: Verifikation der Wirksamkeit der Anker und Dübel, Einsenkung der Platten infolge Eigengewicht und Radlast, Ansicht von oben ohne überhöhte Darstellung der Verformungen
- Bild 6-52: Verifikation der Wirksamkeit der Anker und Dübel, Einsenkung der Platten infolge Eigengewicht und Radlast, Ansicht von unten mit 10.000-fach überhöhter Darstellung der Verformungen

- Bild 6-53: Berechnungen zur Kalibrierung des Untergrundes, Lastfall Ecke
- Bild 6-54: Berechnungen zur Kalibrierung des Untergrundes, Lastfall Rand
- Bild 6-55: Berechnungen zur Kalibrierung des Untergrundes, Lastfall Mitte
- Bild 6-56: Iterationsfall 1
- Bild 6-57: Iterationsfall 2
- Bild 6-58: Iterationsfall 3
- Bild 6-59: Iterationsfall 4
- Bild 6-60: Eingabemöglichkeit im Programm [AWDSTAKO] für die Plattenbreiten
- Bild 6-61: Schematische Darstellung der Schnittstelle zwischen [AWDSTAKO] und dem Solver CalculiX
- Bild 8-1: Verformung einer Platte mit kritischer Länge unter Temperatur und Eigenlast
- Bild 8-2: Eckabbruch an einer Betonfahrbahnplatte
- Bild 8-3: Horizontaler Riss am Plattenrand
- Bild 8-4: Temperaturverlauf mit Gradientenumkehrung über die Deckendicke
- Bild 8-5: Vertikalspannungen an der Plattenecke (Gelb/Rot = Zugspannungen)
- Bild 8-6: Schematische Darstellung des Spaltzugversuchs (aus [AL Sp-Beton 06])
- Bild 8-7: Idealisierter Spaltzug Skizze
- Bild 8-8: Finite-Elemente-Modell Spaltzug Diskretisierung
- Bild 8-9: Simulation des Spaltzugversuchs mit Bruchlast für eine Spaltzugfestigkeit von  $4 \text{ kN/m}^2$
- Bild 8-10: Schnitt durch Zylinder mit erster Hauptspannung für idealisierten Spaltzugversuch ohne Querdehnung in Längsrichtung
- Bild 8-11: Schnitt durch Zylinder mit erster Hauptspannung für idealisierten Spaltzugversuch mit Querdehnung in Längsrichtung

## Tabellen

- Tab. 6-1: Maximale Hauptspannungen für verschiedene Berechnungsfälle bei der Benutzung unterschiedlicher FEM-Modelle
- Tab. 6-2: Faktoren zur Bestimmung des Temperaturgradienten
- Tab. 6-3: Materialparameter für die unteren Tragschichten
- Tab. 6-4: Materialparameter für die Anker und Dübel
- Tab. 6-5: Zulässige maximale Hauptspannungen bei verschiedenen dreiachsigen Spannungskonstellationen
- Tab. 6-6: Zuordnung der Lastpositionen zu den Verkehrslastfällen
- Tab. 6-7: Zuordnung der Lastpositionen zu den Verkehrslastfällen
- Tab. 6-8: Reduktion der zu führenden Berechnungen durch Bildung von äquivalenten Lastfallgruppen für den Hauptfahrstreifen
- Tab. 6-9: Zu führenden Berechnungen für den Hauptfahrstreifen am 9-Plattensystem
- Tab. 6-10: Reduktion der zu führenden Berechnungen durch Bildung von äquivalenten Lastfallgruppen
- Tab. 6-11: Zu führenden Berechnungen für den Nebenfahstreifen am 9-Plattensystem
- Tab. 6-12: Zu führenden Berechnungen für den Hauptfahrstreifen am 6-Plattensystem
- Tab. 6-13: Zum 9-Plattensystem äquivalente Lastfallkombinationen für den Hauptfahrstreifen am 6 Plattensystem
- Tab. 6-14: Zu führenden Berechnungen für den Nebenfahstreifen am 6-Plattensystem
- Tab. 6-15: Zum 9-Plattensystem äquivalente Lastfallkombinationen für den Nebenfahstreifen am 6-Plattensystem
- Tab. 6-16: Zu führenden Berechnungen für den Hauptfahrstreifen am 4-Plattensystem

- Tab. 6-17: Zum 9-Plattensystem äquivalente Lastfallkombinationen für den Hauptfahrstreifen am 4-Plattensystem
- Tab. 6-18: Zu führenden Berechnungen für den Nebefahrstreifen am 4-Plattensystem
- Tab. 6-19: Zum 9-Plattensystem äquivalente Lastfallkombinationen für den Nebefahrstreifen am 4-Plattensystem
- Tab. 6-20: Zu führenden Berechnungen für den Hauptfahrstreifen und Nebefahrstreifen an der Einzelplatte
- Tab. 6-21: Parameter-Platte für Locking-Test
- Tab. 6-22: Vergleichsrechnungen zur Kalibrierung des Untergrundes

## Schriftenreihe

### Berichte der Bundesanstalt für Straßenwesen

#### Unterreihe „Straßenbau“

## 2014

S 84: Anforderungen an die Erhaltung von Radwegen  
Maerschalk, Oertelt € 19,00

S 85: Kornformbeurteilung mit dem optischen Partikelmessgerät Camsizer®  
Kunz  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

## 2015

S 86: Einfluss des Asphaltgranulates auf die bemessungs- und ermüdungsrelevanten Materialeigenschaften einer zwangsgemischten, kaltgebundenen und bitumendominanten Tragschicht  
Radenberg, Miljković, Schäfer  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden

S 87: Untersuchungen zur Ermittlung von Präzisionswerten für zwei AKR-Schnelltests Durchführung und Auswertung  
Müller, Seidel, Böhm  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 88: Verwendung von AKR-geschädigtem Betonaufbruch für hydraulisch gebundene Tragschichten  
Hüniger, Börner  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 89: Ermittlung von repräsentativen Substanzwerten in homogenen Abschnitten  
Villaret, Frohböse, Jähmig, Karcher, Niessen, Buch, Zander  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 90: AKR-Untersuchungen für Fahrbahndecken aus Beton mit Waschbetonoberfläche  
Müller, Seidel, Böhm, Stark, Ludwig, Seyfarth  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 91: Straßen im Gesamtsystem der Verkehrsträger  
Durner  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 92: Längsebenheitsmesssysteme – Überprüfung der Signalverarbeitungsverfahren nach dem Prinzip der Mehrfachabtastung (HRM)  
Neubeck, Wiesebrock  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

## 2016

S 93: Bewertung und Optimierung der Hydrophobierung zur Verminderung des AKR-Schädigungsfortschrittes in Fahrbahndeckenbetonen  
Weise, Schrang € 19,50

S 94: Beanspruchung und Entfernbarekeit temporärer Fahrbahnmarkierung  
Kemper, Schacht, Klaproth, Oeser, Beyer € 16,50

S 95: Bezugsgröße für den Verdichtungsgrad von Schichten ohne Bindemittel  
Bialucha, Merkel, Motz, Demond, Schmidt, Ritter, Haas € 14,50

S 96: Bewertungshintergrund für den Widerstand gegen Polieren von Gesteinskörnungen nach dem PWS-Verfahren  
Dudenhöfer, Rückert  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 97: Einheitliche Bewertungs- kriterien für Elemente der Straßenverkehrsinfrastruktur im Hinblick auf Nachhaltigkeit – Straße und Tunnel  
Fischer, Sauer, Jungwirth, Baumgärtner, Hess, Ditter, Roth, Xalter  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 98: Verifikation eines Europäischen Prüfverfahrens zur Beurteilung der Dauerhaftigkeit von Asphalt  
Böhm, Beara  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 99: Ansprache und Steuerung von Healing-Effekten bei Asphalt  
Wistuba, Alisov, Isailović  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 100: Probekörperherstellung für performance-basierte Asphaltprüfungen  
R. Roos, C. Karcher, A. Wittenberg  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 101: Belastungseinrichtung Mobile Load Simulator MLS10 Sensorik zur Beanspruchungsdetektion im ersten gemeinsamen Versuchsbetrieb  
Wacker, Scherckenbach, Rabe, Golkowski  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 102: Effizienz technischer Sicherungsmaßnahmen im Erdbau – Lysimeteruntersuchungen unter Laborbedingungen – Teil 1: Bodenmaterial  
Kellermann-Kinner, Bürger, Marks € 16,50

S 103: Effizienz technischer Sicherungsmaßnahmen im Erdbau – Untersuchungen von Bauweisen in Freilandlysimetern – Teil 1: Untersuchungszeitraum 2010 - 2013  
Brand, Tiffert, Endres, Schnell, Marks, Kocher € 19,50

S 104: Nachhaltige und effiziente Sanierung von Schlaglöchern  
Thienert, Beckedahl, Koppers, Paffrath, Nafe € 15,00

## 2017

S 105: Untersuchungen zur Überprüfung des Luftporenanteils als Verdichtungsanforderung bei feinkörnigen Böden und bindigen Mischböden  
Lypp, Birle, Heyer, Vogt € 20,50

S 106: Zusammenhang zwischen Bitumenchemie und straßenbautechnischen Eigenschaften  
Radenberg, Nytus, Gehrke  
Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 107: Baustoffe für standfeste Bankette  
Koukoulidou, Birle, Heyer € 15,50

S 108: Neue Wege zur Finanzierung des Straßenbaus – Entwicklungen des europäischen Umweltrechts – Referate eines Forschungsseminars des Arbeitskreises „Straßenrecht“ am 21./22. September 2015 in Bonn  
Durner

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 109: RIVA – Risikoanalyse wichtiger Verkehrsachsen des Bundesfernstraßennetzes im Kontext des Klimawandels  
Korn, Leupold, Mayer, Kreienkamp, Spekat € 15,50

S 110: Vergleichbarkeit der Auslaugraten von Materialien mit und ohne Sandzumischung nach dem Säulenkurzverfahren (DIN 19528)  
Lin, Linnemann, Vollpracht € 16,50

S 111: Bitumenextraktion aus Asphalt mit dem nachwachsenden Rohstoff Octansäuremethylester(Kokosester)

Alisov, Wistuba

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 112: Nachweis der flächendeckenden Verdichtungskontrolle von Asphalt

Zander, Buch, Birbaum

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 113: Einfluss der Temperatur auf die Probekörperherstellung bei Niedrigtemperaturgussasphalt im Rahmen der Kontrollprüfungen

Schellenberg

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 114: Studie zum Anwendungspotenzial von werksgemischtem Kaltbauweisen – Asphalt

Mollenhauer

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

## 2018

S 115: Performance-orientierte Asphaltspezifikation – Entwicklung eines praxisgerechten Prüfverfahrens zur Ansprache des Verformungswiderstandes

Wistuba, Isailović

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 116: Weiterführende Untersuchungen zur Beurteilung des Adhäsionsverhaltens zwischen Bitumen und Gestein

Radenberg, Nytus, Boetcher, Diedel, Miebling

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 117: Bauzeitenverkürzung durch optimierten Asphalteinbau

Böhm, Tielmann, Ulrich, Verges, Muschalla

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 118: Untersuchung der Dauerhaftigkeit unterschiedlicher Asphaltbinderkonzepte

Renken, Wistuba

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 119: Grundfragen des straßenrechtlichen Nutzungsregimes – Straßenrecht im Zeichen des Klimawandels

Durner

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 120: Temperaturuntersuchungen am und im Mobile Load Simulator MLS30 – Analyse des Temperatureinflusses während eines Dauerversuchs für weitere Versuchsprogramme

Wacker, Scherkenbach, Jansen in Vorbereitung

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 121: Repräsentative Ermittlung der performance-relevanten Asphalteeigenschaften als Grundlage neuer Vertragsbedingungen  
Roos, Plachkova-Dzhurova, Grafmüller, Milch, Hase, Schindler

Schröter, Zumsande, Wörner, Kazakova, Patzak in Vorbereitung

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 122: Ermittlung neuer Zuordnungswerte zur Einteilung bindiger Böden in Fest- und Lockergesteine

Möller, Bundschuh, Birle, Heyer

€ 18,50

S 123: Bindemitteldesign für Asphaltstraßen – Definition eines chemisch-rheologischen Anforderungsprofils

Stephan, Weigel

€ 19,00

S 124: Dauerhafte Betonfahrbahndecken unter Berücksichtigung aktueller ökologischer und wirtschaftlicher Aspekte

Müller, Schulte-Schrepping, Benra, Ludwig, Breitenbücher

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 125: Potenzial innovativer Messsysteme für den Erdbau – Literaturstudie

Radenberg, Manke, Steeb, Jänicke

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

S 126: Bau und Messungen an einer Versuchsstrecke mit optimierter Kiestragschicht unter der Betondecke

Freudenstein, Neudert

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

## 2019

S 127: Entwicklung eines Finite Elemente Modells für die rechnerische Dimensionierung von Straßen gemäß RDO Beton

Villaret, Kiehne, Riwe, Villaret

Dieser Bericht liegt nur in digitaler Form vor und kann unter <http://bast.opus.hbz-nrw.de/> heruntergeladen werden.

---

Fachverlag NW in der Carl Ed. Schünemann KG

Zweite Schlachtpforte 7 · 28195 Bremen

Tel. + (0)421/3 69 03-53 · Fax + (0)421/3 69 03-63

Alternativ können Sie alle lieferbaren Titel auch auf unserer Website finden und bestellen.

[www.schuenemann-verlag.de](http://www.schuenemann-verlag.de)

Alle Berichte, die nur in digitaler Form erscheinen, können wir auf Wunsch als »Book on Demand« für Sie herstellen.